ŞTEFAN GRIGORAŞ

INGINERIA FIABILITĂȚII

VOL. II

„Să ai grijă la garanție:
ceea ce este scris cu aldine – îți dă,
iar ceea ce este scris cu litere foarte mici – îți ia înapoi”
Anonimus

$$dE[N(t)] = \frac{\partial E[N(t)]}{\partial t} dt = (L/m)e^{-t/m} dt$$

$$R = Lc\left[1 - \left(\frac{m}{w}\right)\left(1 - e^{-w/m}\right)\right]$$

$$r = \frac{R}{L} = c\left[1 - \left(\frac{m}{w}\right)\left(1 - e^{-w/m}\right)\right]$$

$$C_w = r\beta(\lambda/i)^{\beta} \exp(-iw) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iw)^{\beta+k}}{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+k)}$$

JUNIMEA

Scanned with OKEN Scanner

ŞTEFAN GRIGORAŞ

INGINERIA FIABILITATII

VOL. II

*"**Să ai grijă la garanție**:*
*ceea ce este scris cu aldine - **îți dă**,*
*iar ceea ce este scris cu litere foarte mici - **îți ia înapoi**"*
Anonimus

$$dE[N(t)] = \frac{\partial E[N(t)]}{\partial t} dt = (L/m)e^{-t/m} dt$$

$$R = Lc[1 - (\frac{m}{w})(1 - e^{-w/m})]$$

$$r = \frac{R}{L} = c[1 - \left(\frac{m}{w}\right)(1 - e^{-w/m})]$$

$$C_w = r\beta(\lambda/i)^{\beta} \exp(-iw) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iw)^{\beta+k}}{\beta(\beta+1)...(\beta+k)}$$

EDITURA *JUNIMEA*
IAŞI 2007

Scanned with OKEN Scanner

Referent ştiinţific:

Prof.univ.dr.matematician **Valeriu SAVA**

VOLUM EDITAT CU SPRIJINUL AUTORITĂŢII NAŢIONALE PENTRU CERCETARE ŞTIINŢIFICĂ

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
GRIGORAŞ, ŞTEFAN
Ingineria fiabilităţii / Ştefan Grigoraş – Iaşi: Junimea, 2003
vol.
Vol. 2. – 2007. – ISBN 978-973-1230-5

62-192

Tehnoredactare: Ştefan Grigoraş

Copyright © 2007, Editura *JUNIMEA* Iaşi

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINS

PAG.

CAP. 6. MODELE PARAMETRICE DE FIABILITATE 7

6.1. METODA *ISTORICULUI INFORMAȚIILOR* (DATELOR).....7
6.2. METODA *TESTULUI DURATEI DE VIAȚĂ OPERAȚIONALE*.....8
6.3. METODA *TESTULUI DE TIP TIMP ACCELERAT (BURN-IN)*.....8
6.4. METODA *TESTULUI ACCELERAT DE DURABILITATE*.....9
6.5. TIPURI DE CENZURARE.....11
6.5.1. TIPUL 1 DE CENZURARE.....11
6.5.2. TIPUL 2 DE CENZURARE.....11
6.5.3. CENZURARE ALEATORIE 11
6.5.4. CALCULUL RATEI DE RISC PENTRU TESTĂRI CENZURATE.....12
6.6. DISTRIBUȚIA *EXPONENȚIALĂ*.....13
6.6.1. TESTE CU TIMPI DE DEFECTARE ANORMAL DE MICI.....16
6.6.2. TESTE CU TIMPI DE DEFECTARE ANORMAL DE MARI.....18
6.6.3. DATE EXPERIMENTALE CARACTERISTICE TIPULUI 1 DE CENZURARE.....23
6.6.4 DATE EXPERIMENTALE CARACTERISTICE TIPULUI 2 DE CENZURARE.....26
6.7 DISTRIBUȚIA *RAYLEIGH* 27
6.7.1 ESTIMAREA PARAMETRULUI DISTRIBUȚIEI RAYLEIGH PENTRU DATELE OBȚINUTE ÎN URMA ÎNCERCĂRILOR NECENZURATE 28
6.7.2 ESTIMAREA PARAMETRULUI DISTRIBUȚIEI RAYLEIGH PENTRU DATELE OBȚINUTE ÎN URMA ÎNCERCĂRILOR CENZURATE 30
6.7.3 CEA MAI BUNA ESTIMARE LINIARĂ OBIECTIVĂ PENTRU PARAMETRUL RAYLEIGH ÎN CAZUL DATELOR CU ȘI FĂRĂ CENZURARE.....31
6.8 DISTRIBUȚIA *WEIBULL*.....34
6.8.1 ÎNCERCĂRI NECENZURATE6.....34
6.8.2. ÎNCERCĂRI CENZURATE 38
6.8.3 ESTIMĂRI ALEATORII ALE PARAMETRILOR DISTRIBUȚIEI WEIBULL.....39
6.8.4 VARIAȚIA ESTIMĂRILOR *MLE*.....40
6.8.5 ESTIMAREA OBIECTIVĂ A LUI $\hat{\gamma}$ 40
6.8.6 INTERVALE DE ÎNCREDERE PENTRU $\hat{\gamma}$ 42
6.8.7 DEDUCEREA LUI $\hat{\theta}_1$ 43
6.9 DISTRIBUȚIA *LOG-NORMALĂ*.....45
6.9.1 ÎNCERCĂRI NECENZURATE6.....46
6.9.2. ÎNCERCĂRI CENZURATE 50
6.10 DISTRIBUȚIA *GAMMA*.....53
6.10.1 ÎNCERCĂRI NECENZURATE.....53
6.10.2 ÎNCERCĂRI CENZURATE.....56

Scanned with OKEN Scanner

6.10.3. VARIAȚIA PARAMETRILOR $\hat{\gamma}$ ȘI $\hat{\theta}$ 58
6.10.4 INTERVALE DE ÎNCREDERE PENTRU PARAMETRUL γ 60
6.11. DISTRIBUȚIA *VALORII EXTREME*....62
6.12 DISTRIBUȚIA *SEMI – LOGISTICĂ* 65
6.13. MODELE LINIARE....66
6.14. CENZURAREA MULTIPLĂ A DATELOR....68
6.14.1 ESTIMATORUL PRODUS-LIMITĂ (EPL)....68
6.14.2. ESTIMATORUL CUMULATIV DE RISC (*ECR*)....69

CAP.7. MODELE PENTRU TESTAREA ACCELERATĂ A DURATEI DE VIAȚĂ....71

7.1 TESTAREA ACCELERATĂ....71
7.2 MODELE PENTRU DATE DE DEFECTARE ACCELERATĂ....72
7.3 MODELE PARAMETRICE STATISTICE DE BAZĂ 74
7.3.1 MODELUL DISTRIBUȚIEI *EXPONENȚIALE ACCELERATE*....74
7.3.2 MODELUL DISTRIBUȚIEI *WEIBULL ACCELERATE*....77
7.3.3 MODELUL DISTRIBUȚIEI *RAYLEIGH ACCELERATE*....78
7.3.4 MODELUL DISTRIBUȚIEI *LOG-NORMALE ACCELERATE*....79
7.4 MODELELE STATISTICE DE BAZĂ NON-PARAMETRICE....83
7.4.1 MODELUL *LINIAR*....83
7.4.2 MODELUL *RATELOR DE RISC PROPORȚIONALE*....84
7.5 MODELE FIZICO – STATISTICE DE BAZĂ....88
7.5.1 MODELUL *ARRHENIUS*....88
7.5.2 MODELUL *EYRING*....90
7.5.3. MODELUL *REGULII PUTERII INVERSE*....93
7.5.4 MODELUL *COMBINAT*....95
7.6 MODELE FIZICO – EXPERIMENTALE DE BAZĂ....96
7.6.1 MODELUL *ELECTROMIGRAȚIEI*....97
7.6.2 CĂDERI DEPENDENTE DE *UMIDITATE*....98
7.6.3 CĂDERI DATORATE *OBOSELII*....99
7.7 MODELE DE DEGRADARE....99
7.7.1 MODELUL DE DEGRADARE A *REZISTORILOR*....100
7.7.2 MODELUL DE DEGRADARE A *LASERULUI*....100
7.8 PLANURI DE TESTARE ACCELERATĂ A DURATEI DE VIAȚĂ....102

CAP. 8. PROCESE DE REPARARE ȘI NUMĂRUL AȘREPTAT DE DEFECTĂRI....105

8.1 ESTIMAREA PARAMETRICĂ A FUNCȚIEI *M(T)*....106
8.1.1 TIMP CONTINUU....106
8.1.2 TIMP DISCRET....116
8.2 ESTIMAREA NON-PARAMETRICĂ A FUNCȚIEI *M(T)*....118
8.2.1 TIMP CONTINUU....118
8.2.2 TIMP DISCRET....125
8.3 PROCESUL DE REÎNNOIRE ALTERNATIV....126
8.3.1 NUMĂRUL AȘTEPTAT DE CĂDERI ÎN PROCESUL DE REÎNNOIRE ALTERNATIV....126
8.3.2 PROBABILITATEA COMPONENTEI DE TIP j DE A FI ÎN UZ LA MOMENTUL t....127

Scanned with OKEN Scanner

8.4 APROXIMĂRI ALE LUI *M(t)*.....128
8.5 ALTE TIPURI DE PROCESE DE REÎNNOIRE.....131
8.6 VARIAȚIA NUMĂRULUI DE REÎNNOIRI.....132
8.7 INTERVALE DE ÎNCREDERE PENTRU FUNCȚIA DE REÎNNOIRE.....139
8.8 DURATA DE VIAȚĂ RĂMASĂ LA MOMENTUL *t*.....140
8.9 PROCESE *POISSON*.....142
8.9.1 PROCESUL *POISSON* OMOGEN.....143
8.9.2 PROCESUL *POISSON* NEOMOGEN.....143

CAP. 9. MODELE DE GARANȚIE.....147

9.1. INTRODUCERE.....147
9.2. MODELE DE GARANȚIE PENTRU PRODUSE NEREPARABILE.....150
9.2.1. COSTUL DE GARANȚIE PENTRU PRODUSE NEREPARABILE.....150
9.2.2. FONDUL DE REZERVĂ PENTRU GARANȚIE. RABATUL PENTRU PRODUSE CUMPĂRATE EN-GROS.....153
9.2.3. POLITICI DE GARANȚIE COMBINATE.....157
9.2.4. ÎNLOCUIRI OPTIME PENTRU OBIECTE AFLATE ÎN GARANȚIE.....161
9.3. MODELE DE GARANȚIE PENTRU PRODUSELE REPARABILE.....167
9.3.1. COSTUL GARANȚIEI PENTRU PRODUSELE REPARABILE.....167
9.3.2. MODELE DE GARANȚIE PENTRU O MĂRIME A LOTULUI FIXATĂ. DISTRIBUȚIA ARBITRARĂ A TIMPILOR DE DEFECTARE.....169
9.3.3. MODELE DE GARANȚIE PENTRU UN LOT DE MĂRIME FIXĂ. METODA REPARAȚIEI MINIME.....171
9.3.4. MODELE DE GARANȚIE PENTRU UN LOT DE MĂRIME FIXĂ. METODA DE REPARARE CA ȘI CUM AR FI NOU.....172
9.3.5. MODELE DE GARANȚIE PENTRU LOTURI DE MĂRIME FIXĂ. METODA DE REPARARE COMBINATĂ.....174
9.4. DREPTURI DE GARANȚIE.....180
9.4.1. CERERI DE GARANȚIE CONSEMNATE ÎNTÂRZIAT FAȚĂ DE MOMENTUL SEMNALĂRII.....181
9.4.2. CERERI DE GARAMȚIE PENTRU DATE GRUPATE.....183

CAP.10. INSPECȚIA ȘI ÎNTREȚINEREA PREVENTIVĂ.....185

10.1. MODELE DE ÎNTREȚINERE PREVENTIVĂ ȘI ÎNLOCUIRE. MINIMALIZAREA COSTURILOR.....186
10.1.1. POLITICA DE ÎNLOCUIRE LA INTERVALE CONSTANTE.....187
10.1.2. ÎNLOCUIREA LA PERIOADĂ PREDETERMINATĂ.....191
10.2 MODELE DE ÎNTREȚINERE PREVENTIVĂ ȘI ÎNLOCUIRE. MINIMIZAREA PERIOADEI DE NEFUNCȚIONARE.....195
10.2.1 POLITICA DE ÎNLOCUIRE LA INTERVALE CONSTANTE (PIIC).....195
10.2.2 ÎNLOCUIREA PREVENTIVĂ LA O PERIOADĂ PRESTABILITĂ.....196
10.3. MODELE PENTRU REPARAȚII MINIME.....199
10.3.1. MOMENTUL OPTIM DE ÎNLOCUIRE ÎN CAZUL REPARAȚIEI MINIME.....200
10.4. INTERVALE OPTIME DE ÎNLOCUIRE PENTRU SISTEMELE SUPUSE LA ȘOCURI.....205

Scanned with OKEN Scanner

10.4.1. POLITICA DE ÎNLOCUIRE PERIODICĂ CU COSTURI INDEPENDENTE DE TIMP.....205
10.4.2. POLITICA DE ÎNLOCUIRE PERIODICĂ CU COSTURI DEPENDENTE DE TIMP.....208
10.5. ÎNTREȚINEREA PREVENTIVĂ ŞI NUMĂRUL PIESELOR DE SCHIMB.....209
10.5.1 NUMĂRUL PISELOR DE SCHIMB ŞI DISPONIBILITATEA.....215
10.6 INSPECȚIA PERIODICĂ.....220
10.6.1 POLITICA OPTIMĂ DE INSPECȚIE.....220
10.6.2. INSPECȚIA PERIODICĂ ŞI MENTENANȚA.....224
10.7 CONTROLUL ŞI MONITORIZAREA ON-LINE.....229
10.7.1.ANALIZA VIBRAȚIILOR.....230
10.7.2. EMISIA ACUSTICĂ ŞI ÎNREGISTRAREA SONORĂ.....230
10.7.3.MONITORIZAREA TEMPERATURII.....231
10.7.4 MONITORIZAREA FLUIDELOR.....232
10.7.5 MONITORIZAREA COROZIUNII.....232
10.7.6 ALTE METODE DE DEPISTARE.....233

CAP.11. STUDII DE CAZ.....235

I..STUDII DE CAZ REZOLVATE.....235
CAZUL1. SUBSISTEMUL DISTRIBUITOR AL MACARALEI.....235
CAZUL 2. PROIECAREA UNEI LINII DE FABRICAȚIE.....243
CAZUL 3. SISTEM DE DETECȚIE A MATERIALELOR EXPLOZIVE.....252
CAZUL 4. FIABILITATEA MODELULUI REȚELEI DE TELECOMUNICAȚIE PENTRU SISTEMUL DE CONTROL AL TRAFICULUI AERIAN.....260
CAZUL 5. PROIECTARE DE SISTEM PRIN UTILIZAREA OBIECTIVELOR DE FIABILATE.....271

II.STUDII DE CAZ PROPUSE SPRE REZOLVARE REZOLVATE.....284

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚĂ

Ridicarea nivelului de fiabilitate a componentelor şi produselor finite este unul dintre aspectele cele mai importante ale design-ului şi producției în industria mondială de astăzi, calitatea având un impact direct asupra competitivității. Lucrarea abordează problema fiabilității dintr-o perspectivă avantajoasă, descriind rolul ingineriei fiabilității în diferite faze: de la proiectare până la producția propriu-zisă, asamblare, exploatare şi întreținere. Lucrarea acoperă fiecare aspect din domeniu, incluzând calculele elementare pentru estimările de fiabilitate, alcătuirea şi aplicarea funcțiilor de probabilitate folosite pentru a estima parametrii distribuției în raport cu timpul de apariție a defecțiunilor şi ştiința asigurării obiectivelor de fiabilitate prin asigurarea service - ului preventiv şi a garanției.

În mod deosebit, se insistă pe o gama largă de modele parametrice şi non-parametrice de fiabilitate. Încercările de durată accelerate, una dintre cele mai importante descoperiri în domeniu, sunt de asemeni aprofundate. Fiecare element teoretic prezentat este urmat de un exemplu concret care să-i ilustreze aplicabilitatea şi un întreg capitol dedicat studiilor pe cazuri concrete care să demonstreze felul în care, metodele discutate în această lucrare pot fi folosite pentru a soluționa situații reale.

Software - ul special prezentat în lucrarea /12/ dă posibilitatea de a aplica în analiza şi interpretarea datelor experimentale o varietate de modele de fiabilitate, parametrice şi non-parametrice, inclusiv pentru testele accelerate de durabilitate.

Majoritatea exemplelor şi studiilor de caz sunt din domeniile electric şi electronic, dar şi mecanic, lucrarea adresându-se în special studenților şi absolvenților din domeniul MECATRONIC.

Capitolul
6

MODELE PARAMETRICE DE FIABILITATE

Unul din cei mai importanți factori care influențează procesul de proiectare a unui produs sau al unui sistem este valoarea fiabilității componentelor sale. De exemplu, un echipament modern, sau un PC foloseşte de obicei un număr foarte mare de circuite integrate într-un singur sistem. Evident, un procentaj foarte mic din circuitele care prezintă defecțiuni într-o perioadă de funcționare foarte scurtă de la punerea în funcțiune au un impact foarte mare asupra fiabilității sistemului. S-a observat că rata defectării dispozitivelor semiconductoare (componente ale circuitelor integrate) este în prima perioadă foarte mare, ea descrescând mai apoi până la o valoare stabilă.

Există multe exemple care ilustrează că fiabilitatea sistemului depinde în mare măsură de fiabilitatea componentelor individuale din care este format sistemul. Sistemele submarine de transmisie prin fibră optică, sateliții meteorologici, rețele de telecomunicații şi super-computerele sunt sisteme tipice care necesită o fiabilitate foarte mare pentru componente pentru a asigura fiabilitatea dorită întregului sistem.

Pentru a estima fiabilitatea componentelor individuale sau a întregului sistem se poate folosi una sau mai multe din următoarele abordări.

6.1. METODA *ISTORICULUI INFORMAȚIILOR* (DATELOR)

Date despre defectări care se pot găsi în băncile de date sau în diferite manuale, ele fiind extrase din *Rapoartele de exploatare* referitoare la funcționarea sistemelor respective. În astfel de bănci de date şi manuale, datele despre defectări sunt colectate de la diferiți producători şi sunt prezentate cu un set de factori de multiplicare care raportează ratele de defectare la diferite niveluri de calitate a procesului de fabricație şi la condițiile de mediu(de funcționare). De exemplu, expresia generală folosită pentru a determina rata constantă de defectare la un anumit stadiu λ_{ss} a unei componente electronice sau electrice care include diferite dispozitive este :

Scanned with OKEN Scanner

$$\lambda_{ss} = \pi_E \left[\sum_{i=1}^{n} N_i \left(\lambda_G \pi_Q \pi_S \pi_T \right)_i \right] \qquad (6.1)$$

unde:

π_E = factorul de mediu pentru o componentă;

N_i = cantitatea de dispozitive de indice *i*;

n = numărul diferitelor dispozitive N_i din sistem;

λ_G = rata de defectare generică pentru dispozitivul *i*;

π_Q = factorul de calitate pentru dispozitivul *i*;

π_S = factorul de stres pentru dispozitivul *i*;

π_T = factorul de temperatură pentru dispozitivul *i*.

Factorii π_E, π_Q, π_S şi π_T sunt estimați empiric /9/.

Trebuie menționat faptul că această colectare (şi analiză) a datelor de pe teren pune importante probleme, metoda ne-fiind încă prezentă în literatura de specialitate.

6.2. METODA *TESTULUI DURATEI DE VIAȚĂ OPERAȚIONALE*

Un test al perioadei de viață operaționale (Operational Life Test-*OLT*) implică supunerea prototipurilor unui produs – fie că este un produs cu o singură componentă precum un stâlp de rețea telefonică sau unul cu mai multe componente precum autovehiculele sau computerele – la solicitări şi condiții de mediu caracteristice unei funcționări normale.

Durata testului este determinată de numărul de produse testate (mărimea lotului) şi numărul de defectări. În toate cazurile, testul trebuie finalizat atunci când durata sa ajunge să fie egală cu durata de viața presupusă a produsului.

Aşa cum s-a menționat mai devreme, condițiile de testare nu sunt accelerate fiind proiectate să simuleze condițiile de operare de pe teren (ca fluctuațiile de temperatură, putere, sarcină, etc.) Analizele rezultatelor testului sunt utilizate pentru a monitoriza şi pentru a estima fiabilitățile şi ratele de defectare ale diferitelor produse în scopul atingerii valorilor dorite. Deşi rezultatele obținute din *OLT* sunt cele mai utile, în comparație cu cele cu cele obținute de la alte teste, durata testului este relativ lungă, şi costurile asociate le poate face prohibitive în aplicare.

6.3. METODA *TESTULUI DE TIP TIMP ACCELERAT* (*BURN-IN*)

S-a constatat că în cazul unei cantități mari de componente (sau produse) unele componente individuale au defecte de calitate care afectează considerabil durata de viață caracteristică componentei(produsului). Pentru a ne *debarasa* de astfel de componente, se recomandă efectuarea unui test de tip *burn-in* în condiții de stres

Scanned with OKEN Scanner

(diferite de cele normale) - adică, timpul este accelerat. Este important să se observe că determinarea condițiilor de testare trebuie să fie astfel făcută încât să fie detectate majoritatea defectărilor fără o stresare semnificativă totala a componentele rămase.

În plus, trebuie să fie estimată o perioadă optimă de testare astfel încât costul total la producător şi utilizator să fie minim. Există două elemente de cost care trebuie să fie luate în considerare în estimarea acestei perioade. Acestea sunt:

(1) costul/unitate de timp a testului (perioade de testare mai lungi sunt mai costisitoare pentru producător);

(2) costul defectărilor premature de vreme ce perioadele de testare mai scurte pot să nu elimine total componentele care se pot defecta, ceea ce duce la costuri semnificative pentru producători şi pentru consumatori.

Modelele matematice pentru estimarea perioadei de timp optime pentru un astfel de test sunt oferite de lucrarea lui Jensen şi Petersen /17/.

6.4. METODA *TESTULUI ACCELERAT DE DURABILITATE*

Testele accelerate de viață (Accelerated Life Test - *ALT*) sunt folosite pentru a obține rezultate rapide despre modul de distribuție a durabilităților, a ratelor de defectare şi a fiabilităților. *ALT* constă în supunerea unităților testate la condiții care induc apariția mai rapidă a defectărilor.

Astfel, estimarea fiabilității pe termen lung poate fi făcută într-o perioadă de timp scurtă. Rezultatele obținute prin *ALT* sunt folosite pentru a extrapola caracteristica unității la un timp viitor t şi la condiții date de funcționare, normale.

Există două metode folosite pentru desfăşurarea unui test accelerat de durabilitate. În prima metodă, este posibil să se accelereze testul prin utilizarea mult mai intensivă a produsului decât în condiții normale de funcționare. De exemplu, pentru evaluarea distribuției perioadei de viață a unui bec(surse luminoase) aparținând unui telefon care este folosit în medie o oră pe zi, utilizarea becului în timpul duratei sale de viață aşteptate poate fi comprimată, de la 40 de ani cât este estimată durata de funcționare în condiții normale de operare, la 18 luni prin aprinderea şi stingerea alternativă a acestuia, în mod continuu, pe toată perioada testului. Alt exemplu, limita de defectare a unui arbore cotit a unei maşini cu o durată de viață aşteptată de 15 ani (3 ore de condus /zi), poate fi obținută prin comprimarea testului în doi ani. Totuşi, o astfel de accelerare a timpului de folosire a unui produs poate să nu fie posibilă pentru un produs care funcționează constant, cum ar fi cablul de distribuție al unui computer.

Când timpul nu poate fi comprimat, testul se desfăşoară de obicei în condiții de solicitare(stres) mai mari decât cel normale. De exemplu, dacă se presupune că temperatura normală de funcționare a unui computer este de 25^0C, poate fi accelerat testul dacă se supun componentele critice ale sale la o temperatură de 100^0C sau mai

Scanned with OKEN Scanner

mare. Acest lucru va face ca defectarea să se producă mai rapid. Evident, cu cât mai mare este solicitarea, cu atât mai mică este perioada de funcționare până la defectare.

O altă abordarea pentru testul accelerat de durabilitate este aceea conform căreia se supune produsul testat la niveluri de solicitare foarte mari pentru a fi induse defectările cât mai rapid, test denumit *HALT* (Highly Accelerated Life Testing).

Condensatorul este un bun exemplu pentru folosirea testului *HALT* în evaluarea durabilității. În general, durata de timp la aplicarea testului *burn-in* a acestuia este de circa 100 ore. Totuşi, utilizarea metodei *HALT* poate reduce semnificativ perioada necesară testului şi în schimb facilitează creşterea producției.

Pentru a aplica testul *HALT* la condensatoarele ceramice, unul sau ambii factori de stress - temperatură şi voltaj - pot fi folosiți. Evident, există niveluri maxime de solicitare la care produsul testat va fi avariat. În plus, există şi alte pericole asociate testelor accelerate. De exemplu, creşterea voltajului(tensiunii) poate crea situații periculoase pentru personalul şi echipamentul aferente testului deoarece siguranțele, folosite pentru a proteja, se străpung adeseori.

Rezultatele obținute în condiții de solicitare accelerate sunt puse în corelație cu cele caracteristice nivelurilor de solicitare luate în calcul la proiectare (adică, cele corespunzătoare unor condiții de funcționare normale) folosind un model statistic adecvat din punct de vedere fizic /23/.

Două dintre cele mai importante probleme ale testării accelerate de durabilitate sunt *identificarea modelului* şi *estimarea parametrului(-ilor)*. Identificarea modelului este problema cea mai dificilă, întrucât modelele sunt caracterizate prin relații de legătură.

Alegerea unui model nepotrivit poate fi datorată în parte folosirii unei metode ineficiente de estimare a parametrului.

Modelul descrie de obicei o relație corectă între rezultatele obținute în condiții accelerate şi în condițiile normale, când mecanismele defectării sunt aceleaşi în ambele cazuri. Odată ce a fost identificat un model potrivit, este rezonabil să se pună întrebarea care metodă de estimare a parametrilor este mai bună de utilizat, în cazul unor criterii ca abaterea rădăcinii medie pătratice (Root Mean Square-*RMS*) şi eroarea sistematică. Metodele folosite în mod obişnuit pentru estimarea parametrilor sunt: cea a verosimilității maxime (Maximum Likelihood Estimator-*MLE*) şi cea a celei mai bune estimații liniare ne-deplasate (Best Linear Unbiased Estimator-*BLUE*). În capitolul 4 au fost prezentate metodele pentru estimarea parametrilor.

O analiză statistică corectă nu necesită defectarea tuturor unităților testate. Acest lucru este valabil mai ales în situația în care condițiile de testare în cazul încercărilor accelerate sunt apropiate de condițiile de funcționare normale şi defecțiunile nu pot să apară în timpul destinat testării.

Informațiile despre unitățile care nu s-au defectat la niveluri de solicitare apropiate de cele normale sunt mai importante decât informațiile despre cele defectate, care sunt testate la niveluri mult mai înalte decât cele caracteristice

Scanned with OKEN Scanner

condițiilor normale de funcționare. Deci, datele despre unitățile ne-defectate (cenzurate) trebuie să fie încorporate în analiza efectuată. Este important să se prezinte principalele tipuri de cenzurare folosite în astfel de teste.

6.5. TIPURI DE CENZURARE

Un aspect comun al datelor privind fiabilitatea care cauzează probleme în analiza acestora este cenzurarea care are loc deoarece nu toate unitățile testate se vor defecta înainte de a fi îndeplinite criteriile pentru oprirea testării. Există multe tipuri de cenzurare, cele mai utilizate fiind prezentate în continuare.

6.5.1. TIPUL 1 DE CENZURARE

Se presupune testarea a n unități pe o perioadă de timp T. Timpii înregistrați privind defectările a r unități sunt $t_1, t_2, t_3 \ldots\ldots t_r \leq T$. Testul ia sfârşit la timpul T cu n-r unități care supraviețuiesc(nu sa-u defectat). Numărul de defectări, r, este o variabilă aleatoare care depinde de durata testului şi de nivelul de solicitare aplicat.

Analiza în ceea ce priveşte fiabilitatea şi rata defectărilor unităților nu poate fi făcută dacă defectările nu au loc în timpul T. Deci, este important să se stabilească timpul T astfel încât măcar unele unități să se defecteze în timpul testului. Timpul T la care testul se termină este timpul de referință al testului cenzurat în timp, iar acest mod de cenzurare este denumit tipul 1 de cenzurare.

6.5.2. TIPUL 2 DE CENZURARE

Se testează n unități şi sunt înregistrați timpii de defectare exacți ai unităților căzute. Testul continuă până ce apar r defectări, luând sfârşit la timpul t_r. Deoarece s-a specificat în avans numărul r de defectări, se poate şti exact câte date se vor obține în urma derulării testului. Este evident faptul că acest tip de testare garantează că vor fi r timpi de defectare, posibilitatea analizei fiabilității fiind astfel asigurată.

Bineînțeles, acuratețea analizei fiabilității depinde de numărul de timpi de defectare înregistrați. Durata testului, T, este o variabilă aleatoare care depinde de aceeaşi factori discutați în tipul 1 de cenzurare. La acest tip de test parametrul de cenzurat este numărul de defectări, r, ce au loc în timpul testului. Este de preferat acest tip de testare fața de cea de la cazul anterior.

6.5.3. CENZURARE ALEATORIE

Cenzurarea arbitrară se produce atunci când, de exemplu, n unități (mecanisme) sunt divizate între două sau mai multe piese independente de echipamentul de testat. Se presupune că după scurgerea unui timp t_f, se va observa defectarea uneia dintre piesele echipamentului de testat. Unitățile plasate pe acest

Scanned with OKEN Scanner

echipament sunt eliminate de la testare, în timp ce unitățile rămase pe celălalt echipament de testat continuă testul până la finalizarea lui.

Timpul la care se observă defectarea echipamentului de testat se numeşte timpul de cenzură al unităților. Deoarece timpul de defectare a echipamentului de testat este o variabilă întâmplătoare, această metodă de testare a fost denumită *cenzurare aleatorie*.

În următoarele sub-capitole, vor fi analizate datele defectărilor obținute din teste de fiabilitate. Pentru început se vor utiliza ajustări parametrice pentru date, când sunt cunoscuți timpii de defectare ai tuturor unităților testate şi atunci când există cenzurare.

6.5.4. CALCULUL RATEI DE RISC PENTRU TESTĂRI CENZURATE

Aşa cum s-a discutat în capitolul 1, rata de risc(defectare) pentru un interval de timp este raportul dintre numărul de defectări care au loc în intervalul respectiv şi numărul de unități în stare de funcționare la începutul intervalului, înmulțit cu mărimea intervalului. Unitățile cenzurate în intervalul respectiv nu trebuie luate în calcul ca unități defectate în timpul intervalului. În caz contrar, rata de risc va fi exagerat mărită. Următorul exemplu prezintă ce calcule sunt necesare pentru determinarea ratei de risc, pe interval şi cumulativ.

EXEMPLUL 6.1.

O sută de condensatoare ceramice sunt supuse unui test extrem de accelerat de durabilitate. Timpii de defectare ai unor condensatori sunt cenzurați deoarece echipamentul folosit la testarea acestora s-a defectat în timpul testului. Numărul de unități care au supraviețuit este prezentat în tabelul 6.1. Să se calculeze rata de risc simplă şi cumulativă.

Rezolvare

Rata de risc este calculată astfel:

$$h(t_i) = \frac{N_f(\Delta t_i)}{N_s(t_{i-1})\Delta t_i} \qquad (6.2)$$

unde:

$h(t_i)$ = *rata de risc la timpul* t_i;
$N_f(\Delta t_i)$ = *numărul de unități efectuate în timpul intervalului* Δt_i;

$N_s(t_{i-1})$ = *numărul de supraviețuiri la începutul intervalului* Δt_i;
ti = *lungimea intervalului* (t_{i-1}, t_i).

Trebuie observat că $N_f(\Delta t_i)$ *nu include unități cenzurate. Calculele pentru rata de risc şi riscul cumulat sunt prezentate în tabelul 6.1.*

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 6.1 Rata de risc și rata cumulată

Interval de timp	*Nr. unități defectate*	*Nr. unități cenzurate*	*Nr. supraveţuiri la sfârşit de interval*	*Rata de risc x 10^{-1}*	*Rata cumulată x 10^{-1}*
0 - 20	*0*	*5*	*95*	*0,0000*	*0,0000*
20 - 40	*8*	*11*	*76*	*0,0842*	*0,0842*
40 - 60	*7*	*19*	*50*	*0,0921*	*0,1763*
60 - 80	*7*	*10*	*33*	*0,1400*	*0,3163*
80 -100	*9*	*24*	*0*	*0,2727*	*0,5890*

Rata de risc este are o valoare medie de 0,1178. Deci, timpul mediu până la defectare este 8,489 ore.

În următoarele sub-capitole, se vor prezenta modelele parametrice potrivite datelor reieşite din testările pentru fiabilitate, cum ar fi: *Exponențial, Weibull, Log-normal* şi *Gamma.*

6.6. DISTRIBUȚIA *EXPONENȚIALĂ*

Deoarece distribuția exponențială are o rată de defectare constantă şi este frecvent folosită în practică, se va ilustra modul de evaluare a validității ei ca un model pentru timpul de defectare. Fie:

t_1 = timpul primei defecări;

t_i = timpul dintre defectările i -1 şi i (i = 2, 3.....) sau timpul defectării i;

r = numărul de defecări din timpul testului (fără cenzurare);

T = suma timpilor dintre defecări, $T = \sum_{i=1}^{r} t_i$;

X = o variabilă întâmplătoare care reprezintă timpul până la defectare.

Pentru a verifica dacă timpii de defectare urmează distribuția exponențială, se va folosi testul Bartlett, a cărui statistică este:

$$B_r = \frac{2r\left[\ln\left(\frac{T}{r}\right) - \frac{1}{r}\left(\sum_{i=1}^{r} \ln t_i\right)\right]}{1 + (r+1)/6r} \qquad (6.3)$$

unde B_r este statistica distribuită χ^2 cu r-1 grade de libertate.

Testul Bartllet nu contrazice ipoteza că distribuția exponențială poate fi folosită ca model pentru datele privind timpul de defectare dacă valoarea lui B_r se află între ultimele două valori critice ale testului χ^2 cu un procent al nivelului de semnificanță

Scanned with OKEN Scanner

de 100(1-α). Cea mai mică valoare critică este $\chi^2_{(1-\alpha/2),r-1}$ iar cea mai mare valoare critică este $\chi^2_{\alpha/2,r-1}$.

EXEMPLUL 6.2.

Douăzeci de tranzistori sunt testați la 10 volți și 150^{0}C. Când se defectează un tranzistor, este înregistrat timpul defectării iar unitatea defectată este înlocuită cu una nouă. Timpul dintre defectări (în ore) este înregistrat în ordine crescătoare(v.tab.6.2)

Tabelul 6.2. Timpii dintre defectările tranzistorilor

t_i [ore]	
300	25000
500	28000
1000	31000
3000	34000
5000	37000
10000	40000
13000	42000
15000	45000
18000	48000
20000	50000

Să se testeze valabilitatea folosirii unei rate de risc constante pentru aceşti timpi de defectare ai tranzistorilor.

Rezolvare

Deoarece toți tranzistorii s-au defectat în timpul testului, timpii de defectare pot fi considerați ca provenind dintr-un lot de douăzeci de tranzistori, şi fiecare t_i este o valoare a variabilei aleatorii, X, timpul de defectare.

$$\sum_{i=1}^{20} \ln t_i = 188,57$$

$$T = \sum_{i=1}^{20} ti = 487.800$$

$$B_{20} = \frac{2\times 20\left[\ln\left(\frac{487800}{20}\right) - \frac{1}{20}\times 188,57\right]}{1+(21)/(6\times 20)}$$

$$B_{20} = 22,86$$

Valorile critice pentru testul χ^2 cu $\alpha = 0,1$ sunt:

Scanned with OKEN Scanner

$\chi^2_{0,95,\,19} = 10,117$ şi $\chi^2_{0,05,\,19} = 30,144$.

Deci, valoarea lui B_{20} nu contrazice ipoteza că timpii de defectare pot fi modelaţi prin distribuţia exponenţială.

Exemplul următor include tipul 2 de cenzurare.

EXEMPLUL 6.3.

Într-un test similar cu cel din exemplul precedent, douăzeci de tranzistori sunt supuşi la un test accelerat de durabilitate(temperatura 300^{0}C şi 5 volţi). Testul este întrerupt când apare a zecea defectare. Să se determine dacă datele din tabelul 6.3. urmează o distribuţie exponenţială.

Tabelul 6.3. Timpii dintre defectări

t_i [ore]	
800	3000
900	3200
1500	3400
2000	3600
2500	3800

Rezolvare

$$\sum_{i=1}^{10} \ln ti = 76,87$$

$$T = \sum_{i=1}^{10} t_i = 24.700$$

$$B_{10} = \frac{2\times 10\left[\ln\left(\frac{24700}{10}\right) - \frac{1}{10}(76,87)\right]}{1+(10+1)/(6\times 10)}$$

$B_{10}=2,08$

Valorile critice pentru testul χ^2 cu $\alpha = 0,10$ sunt:

$\chi^2_{0,95,\,9}=3,325$ şi $\chi^2_{0,05,\,9}=16,919$.

Deci, valoarea lui B_{10} contrazice ipoteza că datele despre defectare pot fi modelate de distribuţia exponenţială. Totuşi, la un nivel de semnificaţie 98%, valorile critice ale testului devin: $\chi^2_{0,99,\,9}=2,08$ şi $\chi^2_{0,01,\,9}=21,666$.

În acest caz, testul nu contrazice ipoteza conform căreia timpii de defectare pot fi modelaţi de distribuţia exponenţială.

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

6.6.1. TESTE CU TIMPI DE DEFECTARE ANORMAL DE MICI

Timpii rapizi (scurți) de defectare pot să apară ca defecte de execuție în cazul defectărilor instabile. Aceşti timpi de defectare nu reprezintă adevărații timpi de defectare ai lotului. Deci, este important să se determine dacă timpii de defectare sunt anormal de mici, înainte de a adapta datele la o distribuție exponențială. Dacă timpii sunt foarte scurți, nu trebuie luați în considerare în determinarea parametrilor distribuției timpilor de defectare.

Fie $(t_1, t_2, \ldots t_r)$ un şir de r variabile aleatorii, independente şi identice, distribuite exponențial, care reprezintă timpii dintre defectări pentru primele r căderi.

Cantitatea $2t_i/\theta$ este distribuția χ^2 cu două grade de libertate, unde θ este media distribuției exponențiale.

Deci, dacă t este timpul primei defectări, care urmează o distribuție exponențială cu valoarea medie egală cu θ, de forma:

$$f(t)=\frac{1}{\theta}e^{-t/\theta},$$

atunci variabila aleatorie $y = 2t/\theta$ are o distribuție χ^2 cu două grade de libertate. Acest aspect este explicat după cum urmează. Funcția de densitate a variabilei întâmplătoare **t** este cunoscută şi prezentată mai sus. Obiectivul este să se găsească funcția de densitate $g(y)$ pentru variabila y.

Din relația lui y rezultă:

$$dy=\frac{2}{\theta}dt \quad \text{şi} \quad t=\frac{\theta}{2}y$$

Folosind transformarea de variabilă $g(y)dy = f(t)dt$, se va scrie $g(y)$ ca:

$$g(y)=\frac{\theta}{2}f\left(\frac{\theta}{2}y\right)$$

ceea ce conduce la:

$$g(y)=\frac{1}{2}e^{-y/2} \qquad y\geq 0$$

Această expresie este într-adevăr funcția densității de probabilitate a unei distribuții χ^2 cu două grade de libertate. De notat că expresia generală pentru funcția densității de probabilitate a distribuției χ^2 cu două grade de libertate este:

$$g_y = \frac{e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{v}{2}-1}}{2^{\frac{v}{2}} \cdot \Gamma \cdot \left(\frac{v}{2}\right)}$$

Suma a două sau mai multe variabile aleatorii independente de distribuție χ^2 este o nouă variabilă, care urmează o distribuție χ^2 cu un grad de libertate egal cu suma gradelor de libertate ale variabilelor aleatorii individuale /9/.
Astfel:

$\frac{2}{\theta}\sum_{i=2}^{r} t_i$ este distribuția χ^2 cu 2 grade de libertate.

Deci:

$$F = \frac{\frac{2}{\theta} \cdot t_1 / 2}{\frac{2}{\theta}\sum_{i=1}^{r} t_i / (2r-2)}$$

Acest lucru înseamnă că distribuția F poate fi formată ca:

$$F_{2,2r-2} = \frac{(r-1)t_1}{\sum_{i=2}^{r} t_i}$$

unde t_1, timpul scurt al defectării, urmează o distribuție F cu gradele de libertate 2 şi $2r - 2$.
Dacă t_1 este mic, atunci fracția F devine foarte mică, adică:

$$F_{1-\alpha,2,2r-2} \rangle \frac{(r-1)t_1}{\sum_{i=2}^{r} t_i}$$

Această inegalitate este echivalentă cu:

$$F_{\alpha,2r-2,2} \langle \frac{\sum_{i=2}^{r} t_i}{(r-1)t_1}$$

Scanned with OKEN Scanner

Este important de observat faptul că datele despre defectare trebuiesc ordonate crescător cu timpul. Cu alte cuvinte, cel mai mic timp de defectare este aflat la începutul şirului, urmat de al doilea timp ca mărime şi aşa mai departe.

EXEMPLUL 6.4.

Se consideră că datele de defectare reprezintă cicluri de defectare ale celor douăzeci de palete de turbină supuse testului de durabilitate. Testul se realizează prin supunerea turbinei la o încărcare accelerată, înlocuirea cu una nouă la defectare şi înregistrarea timpului de defectare. Să se stabilească dacă timpul primei defectări este anormal de scurt(v. tabel 6.4).

Tabel 6.4. Datele defectării paletelor turbinei-t_i[ore]

150	2230	2780	4350
1320	2245	2885	4375
1700	2280	2985	4550
2050	2435	3750	5000
2110	2675	3950	5785

Rezolvare

Timpul total de defectare (exceptând primul)este:

$$\sum_{i=2}^{20} t_i = 66.935$$

$$t_1 = 150$$

$$F_{calculat} = \frac{66935}{(19)150} = 23{,}49$$

Valoarea critică a lui F la 95% procent de încredere este $F_{0,05,\,38,2} = 19{,}47$.
Astfel prima valoare a timpilor de defectare nu este reprezentativă pentru restul datelor. Cu alte cuvinte, ipoteza că primul timp de defectare nu este anormal de scurt trebuie respinsă.

6.6.2. TESTE CU TIMPI DE DEFECTARE ANORMAL DE MARI

Urmând procedura de mai sus, timpul de defectare t_{ab} este considerat a fi un timp anormal de mare dacă:

$$F_{\alpha,2,2r-2} \quad \langle \quad \frac{(r-1)\,t_{ab}}{\sum_{i \neq ab}^{r} t_i}$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă t_r este cel mai mare timp de defectare, atunci ecuația de mai sus poate fi re-scrisă astfel:

$$F_{\alpha,2,2r-2} < \frac{(r-1)\,t_r}{\sum_{i=1}^{r-1} t_i}.$$

EXEMPLUL 6.5.

Se consideră timpii de defectare din tabelul 6.5. Să se testeze dacă ultimul timp de defectare este anormal de lung, la 5% nivel de semnificanță.

Tabelul 5.5. Timpi de defectare – t_i[ore]

25.000	*45.575*	*62.500*	*78.000*
35.500	*50.050*	*66.000*	*80.500*
38.750	*55.000*	*71.500*	*85.000*
40.050	*58.500*	*73.000*	*87.500*
42.750	*60.000*	*76.250*	*100.000*

Rezolvare

Pentru a verifica dacă timpul de defectare de 100.000 ore este anormal de mare se fac următoarele calcule:

$$\sum_{i=1}^{19} t_i = 1.131.425$$

$$F_{calculat} = \frac{19 \times 100.000}{1.131.425} = 1{,}68$$

Deoarece $F_{calculat} < F_{0,05,\ 2,38} = 3{,}25$, rezultă că ultimul timp de defectare nu este anormal de mare.

Se presupune că n unități sunt supuse unui test, fiind înregistrați timpii exacți de defectare: $t_1, t_2 \ldots\ldots t_n$. Deoarece toate unitățile sau defectat şi nu există cenzurare, estimarea verosimilității maxime(*MLE*) pentru λ este:

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} t_i} \qquad (6.4)$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $\hat{\lambda}$ este estimatorul ratei de defectare caracteristic metodei de verosimilitate maximă.

Media μ pentru distribuția exponențială este $1/\lambda$, iar *MLE* lui μ este:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{\hat{\lambda}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{n} = \bar{t} \qquad (6.5)$$

unde $\hat{\mu}$ este estimatorul durabilității medii caracteristic metodei verosimilității maxime.

EXEMPLUL 6.6.

Se presupune că datele din exemplu 6.2. reprezintă timpii de defectare ai unităților testate. Să se determine durata de viață medie a unui tranzistor din acest lot.

Rezolvare

Folosind ecuația(6.4) se obține:

$$\bar{t} = \frac{487.800}{20} = 24.390 \; ore \; .$$

Se poate demonstra că $2n\hat{\mu}/\mu$ are o distribuție exactă χ^2 cu $2n$ grade de libertate. Deoarece $\lambda = 1/\mu$ şi $\hat{\lambda} = 1/\hat{\mu}$, atunci un interval de încredere de semnificație 100(1-α) pentru $\hat{\lambda}$ (presupunând o durabilitate minimă egală cu zero) este:

$$\frac{\hat{\lambda}\chi^2_{1-\alpha/2,2n}}{2n} < \lambda < \frac{\hat{\lambda}\chi^2_{\alpha/2,2n}}{2n} \qquad (6.6)$$

unde $\chi^2_{\alpha,2n}$ este caracteristică unui procent punctual de încredere de 100α, adică:

$$P\left[\chi^2_{2n} > \chi^2_{\alpha,2n}\right] = \alpha$$

Intervalul de încredere a durabilității medii conform ecuației(6.5) este:

$$\frac{2n\hat{\mu}}{\chi^2_{\alpha/2,2n}} < \mu < \frac{2n\hat{\mu}}{\chi^2_{1-\alpha/2,2n}} \; .$$

Scanned with OKEN Scanner

Când n este mare ($n \geq 25$), se poate obține un interval aproximativ pentru λ aproximând $\hat{\lambda}$ pentru o distribuție normală cu media λ și variația λ^2/n.

Astfel:

$$\hat{\lambda} - \frac{\hat{\lambda} Z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}} < \lambda < \hat{\lambda} + \frac{\hat{\lambda} Z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}} \qquad (6.7)$$

unde $Z_{\alpha/2}$ este procentul punctual de încredere $100(\alpha/2)$ [$P(Z > Z_{\alpha/2}) = \alpha/2$] a distribuției normale standard.

EXEMPLUL 6.7.

Să se determine cele două limite ale intervalului de încredere de 95% pentru durabilitatea medie a tranzistorilor dați în exemplul 6.6.

Rezolvare

Deoarece $\hat{\mu} = 24.390$ *ore, atunci la 95 % nivel de încredere,* $\chi^2_{0,975,\,40} = 24,423$ *și* $\chi^2_{0,025,\,40} = 59,345$. *Limitele lui* μ *sunt :*

$$\frac{2 \times 487.800}{59,345} < \mu < \frac{2 \times 487.800}{24,423} \qquad 16.439,5 \leq \mu \leq 39.945,9 \quad ore\,.$$

EXEMPLUL 6.8.

Un inginer mecanic elaborează un test de oboseală pentru a determina durata de viață așteptată a unor axe, executate dintr-un anumit tip de oțel, prin supunerea a 25 de mostre la o încărcare axială care induce un efort de 450 N/mm². Numărul de cicluri de solicitare este înregistrat la timpul defectării fiecărui specimen din lot. Presupunând că testul este efectuat la un regim de 10 cicluri/ minut, să se determine fiabilitatea unui ax făcut din acest oțel după 10 ore de testare. Rezultatele testului sunt prezentate în tabelul 6.6.

Tabelul 6.6. Numărul de cicluri până la defectare

150	710	1900	5650	10500
300	840	2300	6600	11600
350	1000	2550	7500	12700
430	1250	3400	8600	13650
600	1390	4500	9250	14900

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare

Folosind B_{25} se va verifica mai întâi dacă datele referitoare la defectări ar putea respecta o lege de distribuție exponențială. Acest lucru necesită determinarea numărului de cicluri dintre defectări, așa cum sunt prezentate în tabelul 6.7.

Tabelul 6.7. Numărul de cicluri

Nr. axului		Nr. cicluri până la defectare - CPD		Nr. cicluri dintre defectări -CDD	
1	150	150	13	2550	250
2	300	150	14	3400	850
3	350	50	15	4500	1100
4	430	80	16	5650	1150
5	600	170	17	6600	950
6	710	110	18	7500	900
7	840	130	19	8600	900
8	1000	160	20	9250	650
9	1250	250	21	10500	1250
10	1390	140	22	11600	1100
11	1900	510	23	12700	1100
12	2300	400	24	13650	1050
			25	14900	1250

$$T = \sum_{i=1}^{25} CDD_i = 14.800$$

$$\sum_{i=1}^{25} \ln CDD_i = 148,899$$

$$B_{25} = \frac{2 \times 25 \left[\ln \frac{14.800}{25} - \frac{1}{25} \times 148,899 \right]}{1 + \frac{26}{6 \times 25}}$$

$$B_{25} = 18,047$$

Valorile critice pentru testul χ^2 cu $\alpha = 0,1$ sunt:

$\chi^2_{0,95,\,24} = 13,848$ și $\chi^2_{0,05,\,24} = 36,418$.

Deci, statistica B_{25} nu contrazice ipoteza că timpii de defectare pot fi modelați de distribuția exponențială. Fiabilitatea axului la 10 ore de testare este:

$R(t=10\ ore) = e^{-\hat{\lambda}t}$, unde $\hat{\lambda} = 25/14800$, $R(t=10\ ore) = e^{\frac{-25}{14800} \times 60 \times 10 \times 10}$,
$R(t=10\ ore) = 0,3966 \times 10^{-4}$.

În continuare se va studia efectul cenzurării în estimarea lui λ, mai întâi pentru tipul 1 de cenzurare, apoi pentru tipul 2.

6.6.3. DATE EXPERIMENTALE CARACTERISTICE TIPULUI 1 DE CENZURARE

Se presupune că n unități sunt supuse unui test de durabilitate şi timpii de defectare t_i ai unităților căzute sunt înregistrați şi ordonați crescător. Fie T timpul de cenzurare al testului. Astfel, $t_1 \le t_2 \le t_3 \le \ldots\ldots\ldots\ldots \le t_r \le t_1^+ = \ldots\ldots = t_{n-r}^+ = T$ unde t_1^+ este timpul de cenzurare al unității cenzurate i. Funcția de verosimilitate este:

$$L = \prod_{i=1}^{r} \lambda \cdot e^{-\lambda t_i} \prod_{i=1}^{n-r} e^{-\lambda t_i^+} . \qquad (6.8)$$

Logaritmând ecuația de mai sus (se va folosi notația l pentru $\ln L$), se obține:

$$l = r \ln \lambda - \sum_{i=1}^{r} \lambda t_i - \sum_{i=1}^{n-r} \lambda t_i^+ .$$

Derivata lui l în funcție de λ este:

$$\frac{dl}{d\lambda} = \frac{r}{\lambda} - \sum_{i=1}^{r} t_i - \sum_{i=1}^{n-r} t_i^+ .$$

Egalând derivata cu zero, rezultă *MLE* -ul lui λ :

$$\hat{\lambda} = \frac{r}{\sum_{i=1}^{r} t_i + \sum_{i=1}^{n-r} t_i^+} \qquad (6.9)$$

şi durata de viață medie, estimată, a unităților:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{\hat{\lambda}} = \frac{1}{r}\left[\sum_{i=1}^{n} t_i + \sum_{i=t}^{n-r} t_i^+\right]. \qquad (6.10)$$

Din nou, se poate arăta că statistica $2r\lambda/\hat{\lambda}$ are o distribuție χ^2 cu 2r grade de libertate. Media şi variația lui $\hat{\lambda}$ sunt $r\hat{\lambda}$ (r-1) şi respectiv, $\hat{\lambda}^2$ /(r-1) /9/.
Procentul 100(1-α) al intervalului de încredere pentru λ este:

Scanned with OKEN Scanner

$$\frac{\hat{\lambda}\chi^2_{1-\alpha/2,2r}}{2r} < \lambda < \frac{\hat{\lambda}\chi^2_{\alpha/2,2r}}{2r}. \qquad (6.11)$$

Intervalul de încredere pentru durata de viață medie, μ, este :

$$\frac{2r\hat{\mu}}{\chi^2_{\alpha/2,2r}} < \mu < \frac{2r\hat{\mu}}{\chi^2_{1-\alpha/2,2r}}.$$

Când n este mare ($n \geq 25$), distribuția lui $\hat{\lambda}$ poate fi aproximată printr-o distribuție normală cu media egală cu λ şi variația $\lambda^2/(r\text{-}1)$. Intervalul de încredere de mărime $100(1\text{-}\alpha)$ este:

$$\hat{\lambda} - \frac{\hat{\lambda}Z_{\alpha/2}}{\sqrt{r-1}} < \lambda < \hat{\lambda} + \frac{\hat{\lambda}Z_{\alpha/2}}{\sqrt{r-1}} \qquad (6.12)$$

EXEMPLUL 6.9.

Un producător de valțuri doreşte schimbarea materialului din care sunt executate acestea. Pentru a estima durata de viata aşteptata a noilor valțurilor, producătorul supune unui test continuu 6 unități monitorizând, procesul de degradare. Se consideră o defectare a valțurilor atunci când uzura depăşeşte o valoare prestabilită. Pentru evitarea costurilor mari, producătorul hotărăşte să desfăşoare testarea pe o perioada de 40.000 minute. Timpii de defectare sunt prezentați in tabelul 6.8. Să se determine durata de viata medie a valțurilor executate din noul material. Care este intervalul de încredere, la o cifră de încredere de 90%? Care este fiabilitatea valțurilor la 50.000 de minute?

Tabelul 6.8 Timpii defectării valțurilor

Timpii de defectare [minute]
4.000
6.000
11.000
21.000
23.000
28.000

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare

Se va verifica daca timpii de defectare(TD) urmează o distribuție exponențiala prin estimarea lui B_6, folosind timpii dintre defectări(TDD) prezentați în tabelul 6.9.

Tabelul 6.9 Datele defectării valțurilor

Nr. valțului	TD	TDD
1	4.000	4.000
2	6.000	2.000
3	11.000	5.000
4	21.000	10.000
5	23.000	2.000
6	28.000	5.000

Se calculează :

$$T = \sum_{i=1}^{6} TDD_i = 28.000$$

$$\sum_{i=1}^{6} \ln TDD_i = 49,74$$

$$B_6 = 1,586$$

Valorile critice pentru testul χ^2 *sunt :*

$$\chi^2_{0,95,5} = 1,145 \qquad \chi^2_{0,05,5} = 11,070$$

Rezultă că datele urmează o distribuție exponențiala.
Folosind ecuația (6.10) se poate estima $\hat{\mu}$ *:*

$$\hat{\mu} = \frac{1}{6}[28.000 + 4 \times 40.000] = 31.333 \text{ min}$$

şi intervalul cu 90% procent de încredere pentru μ *este:*

$$\frac{2 \times 6 \times 31.333}{18,307} < \hat{\mu} < \frac{2 \times 6 \times 31.333}{3,940}$$

sau

$$20.538 < \hat{\mu} < 95.430$$

Probabilitatea ca o unitate sa supraviețuiască 50.000 minute este:

$$\hat{R}(50.000) = e^{-\hat{\lambda}t} = e^{\frac{-1}{31.333} \times 50000}$$

$$\hat{R}(50.000) = 0,202$$

unde $\hat{R}(t)$ *este fiabilitatea estimata la timpul t.*

Scanned with OKEN Scanner

6.6.4 DATE EXPERIMENTALE CARACTERISTICE TIPULUI 2 DE CENZURARE

Se presupune că n unități sunt supuse testării la timpul 0 iar timpii lor de defectare sunt înregistrați în ordine crescătoare. Testul se consideră finalizat când r unități din totalul de n se defectează. Timpii de defectare a unităților n sunt $t_1 \le t_2 \le t_3 \le ... \le t_r$, $t_1^+ = ..t_{n-r}^+$, unde t_i este timpul de defectare a unității i şi t_i^+ este timpul de cenzurare a unității cenzurate i, care este şi timpul de cenzurare a testului.

Urmând aceeaşi procedură a analizei datelor cu în cazul precedent de cenzurare, se va obține aceeaşi ecuație pentru *MLE* -ul lui λ şi μ. Astfel, nu există nici o diferența între rezultate, fie că este aplicat primul tip de cenzurare sau cel de-al doilea.

În continuare se va examina situația cenzurării aleatorii când n unități sunt supuse testului de fiabilitate, la timpul 0. Testarea se încheie la timpul T. Fie r, numărul de unități care se defectează înainte de timpul T şi $n-r$, numărul de unități care supraviețuiesc timpului de testare T. Datele obținute sunt notate după cum urmează : $t_1, t_2, ...t_r, t_1^+, t_2^+, ...t_{n-r}^+$, semnul + indicând cenzurarea. Se vor ordona timpii de defectare şi timpii de cenzurare în ordine ascendentă: $t_1 \le t_2 \le t_3 \le ... \le t_r, t_1^+, t_2^+, ...t_{n-r}^+$. Folosind metoda *MLE* se obține :

$$\hat{\lambda} = \frac{r}{\sum_{i=1}^{r} t_i + \sum_{i=1}^{n-r} t_i^+}$$

S-a obținut acelaşi rezultat ca şi în cazul tipului 1 de cenzurare.

Ce se întâmplă dacă toate observațiile sunt cenzurate? În acest caz, se estimează $\hat{\mu}$ ca fiind suma timpului cenzurat al tuturor unităților :

$$\hat{\mu} = \sum_{i=1}^{n} t_i^+$$

Evident, estimarea lui μ are o valoare practică mică şi acest test de fiabilitate poate fi considerat ca fiind unul ne-corespunzător. Metodele pentru utilizarea datelor în cazul cenzurării totale vor fi discutate în capitolul următor.

Când numărul unităților testate, n, este mare (≥ 25), distribuția lui $\hat{\lambda}$ este aproximativ normală cu media λ şi variația /9/ :

$$Var(\hat{\lambda}) \cong \frac{\lambda^2}{\sum_{i=1}^{n} (1 - e^{-\lambda T_i})}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde T_i este timpul la care componenta i este sub observaţie (timpul până la defectare sau de sfârşit al testului). Daca T_i este necunoscut datorita terminării anormale a testului, atunci variaţia poate fi aproximativa cu relaţia :

$$Var(\hat{\lambda}) \cong \frac{\hat{\lambda}^2}{r},$$

unde r este numărul de componente defectate înaintea terminării testului.

Intervalul de încredere de procent $100(1-\alpha)$ este :

$$\hat{\lambda} - Z_{\alpha/2}\sqrt{V\hat{a}r(\hat{\lambda})} < \lambda < \hat{\lambda} + Z_{\alpha/2}\sqrt{V\hat{a}r(\hat{\lambda})}$$

şi distribuţia lui $\hat{\mu}$ este aproximată printr-o distribuţie normală cu media μ şi o variaţie estimată de :

$$V\hat{a}r(\hat{\mu}) = \frac{\hat{\mu}^2}{\sum_{i=1}^{n}(1-e^{-\lambda T_i})}$$

Dacă T_i este necunoscut atunci :

$$V\hat{a}r(\hat{\mu}) \cong \frac{\hat{\mu}^2}{r}$$

Intervalele de încredere ale lui μ sunt :

$$\hat{\mu} - Z_{\alpha/2}\sqrt{V\hat{a}r(\hat{\mu})} < \mu < \hat{\mu} + Z_{\alpha/2}\sqrt{V\hat{a}r(\hat{\mu})}$$

6.7 DISTRIBUŢIA *RAYLEIGH*

Se caracterizează prin faptul că are o funcţie de risc liniar crescătoare cu timpul. Acest lucru implică faptul că, în acest cazul unei distribuţii de tip *Rayleigh* a timpilor de defectare, are loc o îmbătrânire rapidă a echipamentului şi defectările nu satisfac condiţiile unui proces oarecare, staţionar. Mai important, în timpul primelor perioade din viaţa produsului, când rata de risc este semnificativă, probabilitatea defectării în afara funcţionării a produsului (sau sistemul) descreşte cu timpul mai

Scanned with OKEN Scanner

încet decât în cazul distribuției exponențiale. Totuși, odată cu trecerea timpului, probabilitatea de defectare în afara funcționării descreşte cu timpul într-un ritm mai rapid decât la distribuția exponențiala.

Funcția densității de probabilitate a distribuției *Rayleigh* este :

$$f(t) = \lambda \cdot t \cdot e^{\frac{-\lambda t^2}{2}} \tag{6.13}$$

Utilizând distribuția exponențială, se va estima în continuare parametrul distribuției *Rayleigh* pentru date de defectare obținute atât în urma încercărilor cenzurate cât şi ne-cenzurate.

6.7.1 ESTIMAREA PARAMETRULUI DISTRIBUȚIEI RAYLEIGH PENTRU DATELE OBȚINUTE ÎN URMA ÎNCERCĂRILOR NECENZURATE

Se presupune că n unități sunt supuse unui test accelerat de durabilitate şi că timpii exacți ai fiecărei defectări sunt: $t_1 \le t_2 \le t_3 \le ... \le t_n$. Deoarece toate unitățile s-au defectat, atunci *MLE* -ul parametrului distribuției *Rayleigh* este obținut astfel:

$$L(\lambda, t) = \prod_{i=1}^{n} f(t_i) = \prod_{i=1}^{n} \lambda t_i e^{\frac{-\lambda t_i^2}{2}}$$

sau

$$L(\lambda, t) = \lambda^n \prod_{i=1}^{n} t_i e^{\frac{-\lambda t_i^2}{2}} \tag{6.14}$$

Logaritmul ecuației (6.14) este:

$$l(\lambda, t) = n \cdot \ln \lambda + \sum_{i=1}^{n} \ln t_i - \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^{n} t_i^2 . \tag{6.15}$$

Pentru a estima parametrul λ, se va deriva ecuația (6.15) în raport cu λ şi se va egala ecuația rezultată cu 0. Astfel, se va obține:

$$\frac{dl(\lambda, t)}{d\lambda} = \frac{n}{\lambda} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} t_i^2 .$$

Sau

Scanned with OKEN Scanner

$$\hat{\lambda} = \frac{2n}{\sum_{i=1}^{n} t_i^2} \qquad (6.16)$$

Variația distribuției *Rayleigh* este :

$$Var(t) = \frac{2}{\hat{\lambda}}(1 - \frac{\pi}{4}).$$

EXEMPLUL 6.10.

Un producător de senzori de viteză auto supune 15 senzori la un test de fiabilitate care simulează condițiile (temperatura, viteza) la care vor opera aceştia în mod normal. Un senzor este considerat defect atunci când output-ul sau scade sub o toleranță de 5%. Numărul de km parcurşi până la defectare sunt : 150.000, 180.000, 200.000, 205.000, 210.000, 220.000, 225.000, 240.000, 245.000, 250.000, 255.000, 260.000, 270.000, 280.000, 300.000.
Se presupune că aceste date urmează o distribuție Rayleigh. Să se determine parametrul distribuției, durata medie de viață a unui senzor şi variația acestuia.

Rezolvare

Parametrul distribuției este obținut folosind ecuația(6.16):

$$\hat{\lambda} = \frac{2n}{\sum_{i=1}^{n} t_i^2}$$

$$\hat{\lambda} = \frac{2 \times 11}{8,341 \times 10^{11}} = 2,6375 \times 10^{-11}$$

Durata medie de viață este:

$$\sqrt{\frac{\pi}{2\hat{\lambda}}} = \sqrt{\frac{\pi}{2 \times 2,6375 \times 10^{-11}}} = 243.980 \quad km,$$

iar variația

$$\frac{2}{\hat{\lambda}}(1 - \frac{\pi}{4}) = 1,63 \times 10^{10}.$$

Abaterea standard este 127,67.

Scanned with OKEN Scanner

6.7.2 ESTIMAREA PARAMETRULUI DISTRIBUŢIEI RAYLEIGH PENTRU DATELE OBŢINUTE ÎN URMA ÎNCERCĂRILOR CENZURATE

Se presupune că n unităţi sunt supuse unui test şi că timpii de defectare ai celor r unităţi scoase din funcţiune sunt înregistraţi şi ordonaţi crescător: $t_1 \le t_2 \le t_3 \le ... \le t_r$. Unităţile n-r care mai rămân sunt cenzurate, adică, aceste unităţi nu s-au defectat înaintea terminării testului. Se presupune că cenzurarea este de tip 1 sau 2 şi timpii cenzuraţi sunt: $t_1^+ = t_2^+ = ... = t_{n-r}^+$.
Funcţia de verosimilitate este:

$$L(\lambda, t) = \prod_{i=1}^{r} \lambda t_i e^{\frac{-\lambda t_i^2}{2}} \cdot \prod_{i=1}^{n-r} e^{\frac{-\lambda t_i^{+2}}{2}} \quad .$$

iar logaritmul sau este:

$$l(\lambda, t) = r \cdot \ln \lambda + \sum_{i=1}^{r} \ln t_i - \frac{\lambda}{2}\left(\sum_{i=1}^{r} t_i^2 + \sum_{i=1}^{n-r} t_i^{+2}\right).$$

Valoarea estimata a parametrului $\hat{\lambda}$ este obţinuta ca fiind:

$$\hat{\lambda} = \frac{2r}{\sum_{i=1}^{r} t_i^2 + \sum_{i=1}^{n-r} t_i^{+2}}. \qquad (6.17)$$

EXEMPLUL 6.11.

Ca alternativă la testarea prin ciocnire a air-bag-ului unui automobil, s-a proiectat un sistem de testare cu senzor care foloseşte un vibrator mecanic pentru a reconstitui ciocnirile reale măsurate. 15 senzori sunt testaţi timp de 75 de ore, fiind înregistraţi următorii timpi de defectare : 10, 15, 35, 40, 48, 50, 55, 58, 60, 62, 65, 70, 75$^+$, 75$^+$, 75$^+$.
Să se determine parametrul distribuţiei Rayleigh, durata de viaţă medie a senzorilor şi abaterea standard a acesteia.

Rezolvare

Folosind ecuaţia(6.17) se obţine:

$$\hat{\lambda} = \frac{2 \times 12}{(3{,}08 + 1{,}69)10^4} = 5{,}0314 \times 10^{-4}.$$

Durata medie de viaţă este:

Scanned with OKEN Scanner

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2 \times 5,0314 \times 10^{-4}}} = 31,20 \quad ore.$$

Abaterea standard este:

$$= \sqrt{\frac{2}{\hat{\lambda}}(1 - \frac{\pi}{4})} = 29,23 \quad ore.$$

6.7.3 CEA MAI BUNA ESTIMARE LINIARĂ OBIECTIVĂ PENTRU PARAMETRUL RAYLEIGH ÎN CAZUL DATELOR CU ŞI FĂRĂ CENZURARE

Estimarea parametrului *Rayleigh* prin metoda verosimilității maxime este caracterizată printr-o eroare sistematică(deplasare), atunci când numărul de observații este mic.

Eroarea creşte pe măsură ce numărul de observații descreşte. Dacă *f.d.p.* -ul timpului de defectare poate fi liniarizat, această eroare în estimarea parametrului(lor) distribuției poate scădea atunci când este folosită metoda celor mai mici pătrate pentru estimarea parametrilor. În acest caz se spune că avem de-a face cu cea mai bună estimare liniară obiectivă (*the best linear unbiased estimate – BLUE).* În acest capitol, se va utiliza metoda *BLUE* în determinarea parametrului *Rayleigh*, atât pentru cazul încercărilor cenzurate cât şi ne-cenzurate.

6.7.3.1. Estimarea parametrului distribuției Rayleigh prin metoda BLUE

Se presupune că timpii de defectare ai celor n unități supuse testului de fiabilitate sunt: $t_{(1)} \leq t_{(2)} \leq .....\leq t_{(n)}$. Se acceptă că cei n timpi de defectare urmează legea de distribuție *Rayleigh*:

$$f(t) = \frac{1}{\theta_2^2}(t - \theta_1)e^{-(t-\theta_1)^2/2\theta_2^2} \qquad ptr. \quad (t \rangle \theta_1 \geq 0, \theta_2 \rangle 0) \text{ şi}$$

$$f(t) = 0 \qquad \text{ptr. orice altă valoare} \tag{6.18}$$

unde θ_1 este parametrul de locație şi θ_2 este parametrul de scară.

Se observă că ecuația (6.18) este identică cu ecuația (6.13) atunci când $\theta_1 = 0$ şi $\lambda = 1/\theta_2^2$. Aplicând metoda *BLUE* pentru determinarea lui θ_2 când θ_1 este cunoscută, poate fi estimată valoarea acestuia, θ_2^*, astfel:

Scanned with OKEN Scanner

$$\theta_2^* = \sum_{i=1}^{n} b_i t_{(i)} - \theta_1 \frac{K_3}{K_2} \tag{6.19}$$

Daca parametrul de locație θ_1 este zero, funcția densității data de ecuația (6.18) devine:

$$f(t) = \frac{1}{\theta_2^2} t e^{\frac{-t^2}{2\theta_2^2}} \tag{6.20}$$

şi valoarea estimată θ_2^* devine:

$$\theta_2^* = \sum_{i=1}^{n} b_i t_{(i)} \tag{6.21}$$

Valorile coeficienților b_i, a rapoartelor K_3/K_2 şi variația lui θ_2^* sunt date în /9/.

6.7.3.2 Estimarea intervalului de încredere pentru θ_2 în cazul încercărilor necenzurate

Dacă $t_{(1)} \leq .... \leq t_{(n)}$ sunt informații statistice ordonate ale distribuției *Rayleigh*

$$f(t) = \frac{1}{\theta_2^2} t e^{\frac{-t^2}{2\theta_2^2}}$$

atunci $y_{(1)} = t_{(1)}^2/2,\ y_{(2)} = t_{(2)}^2/2, \ldots y_{(n)} = t_{(n)}^2/2$ sunt informații statistice ordonate ale distribuției exponențiale de forma:

$$f(t) = \frac{1}{\theta_2^2} e^{\frac{-y}{\theta_2^2}}$$

De asemenea, $2/\theta_2^2 \sum_{i=1}^{n} y_{(i)}^2 = 1/\theta_2^2 \sum_{i=1}^{n} t_{(i)}^2$ urmează o distribuție χ^2 cu $(2n)$ grade de libertate. Astfel, intervalul de încredere de procent $100(1-\alpha)$ pentru θ_2^2 este:

Scanned with OKEN Scanner

$$\frac{1}{\chi^2_{\alpha/2}} \cdot \sum_{i=1}^{n} t_{(i)}^2 \leq \theta_2^2 \leq \frac{1}{\chi^2_{1-\alpha/2}} \cdot \sum_{i=1}^{n} t_{(i)}^2 \tag{6.22}$$

Intervalul de încredere al lui θ_2, pentru un acelaşi procent, este:

$$\sqrt{\frac{1}{\chi^2_{\alpha/2}} \cdot \sum_{i=1}^{n} t_{(i)}^2} \leq \theta_2 \leq \sqrt{\frac{1}{\chi^2_{1-\alpha/2}} \cdot \sum_{i=1}^{n} t_{(i)}^2} \tag{6.23}$$

unde $\chi^2_{\alpha/2}$ şi $\chi^2_{1-\alpha/2}$ sunt valorile punctuale inferioare şi superioare ale distribuţiei χ^2 cu $2n$ grade de libertate.

6.7.3.3 Estimarea intervalului de încredere pentru θ_2 în cazul încercărilor cenzurate

Se presupune că mărimea lotului studiat este n iar numărul de unităţi cenzurate este r. Intervalul de încredere al lui θ_2^2 pentru un procent de $100(1-\alpha)$, în ipoteza că $(n-r)$ sunt unităţi ne-cenzurate, este:

$$\frac{1}{\chi^2_{\alpha/2}} \cdot \sum_{i=1}^{(n-r)} t_{(i)}^2 \leq \theta_2^2 \leq \frac{1}{\chi^2_{1-\alpha/2}} \cdot \sum_{i=1}^{(n-r)} t_{(i)}^2 \tag{6.24}$$

Astfel, intervalul de încredere pentru θ_2, la un acelaşi procent, este:

$$\sqrt{\frac{1}{\chi^2_{\alpha/2}} \cdot \sum_{i=1}^{(n-r)} t_{(i)}^2} \leq \theta_2 \leq \sqrt{\frac{1}{\chi^2_{1-\alpha/2}} \cdot \sum_{i=1}^{(n-r)} t_{(i)}^2} \tag{6.25}$$

unde $\chi^2_{\alpha/2}$ şi $\chi^2_{1-\alpha/2}$ sunt valorile punctuale inferioare şi superioare ale distribuţiei χ^2 cu $2(n-r)$ grade de libertate.

EXEMPLUL 6.12.

Să se determine intervalul de încredere, pentru un procent(cifră) de încredere de 95%, pentru valoarea lui θ_2^* obţinută prin metoda BLUE, cu datele din exemplul 6.10.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare

Fiind în cazul încercărilor ne-cenzurate, se va utiliza ec.(6.23):

$$\sqrt{\frac{1}{\chi^2_{\alpha/2}}\cdot\sum_{i=1}^{n}t^2_{(i)}} \le \theta_2 \le \sqrt{\frac{1}{\chi^2_{1-\alpha/2}}\cdot\sum_{i=1}^{n}t^2_{(i)}}\ , \text{ unde}$$

$$\sum_{i=1}^{15}t^2_{(i)} = 8,341\square 10^{11}$$

Din tabelele de procentaje pentru distribuţia χ^2 *pentru 20 de grade de libertate(v.vol.I) rezultă:*

$\chi^2_{0.025} = 47,0$ *şi* $\chi^2_{0.975} = 16,8$

Deci, în procent de 95%, intervalul de încredere pentru θ_2^* *este :*

$$\sqrt{\frac{1}{47}\times 8,341\times 10^{11}} \le \theta_2^* \le \sqrt{\frac{1}{16,8}\times 8,341\times 10^{11}}$$

$$133.217,148 \le \theta_2^* \le 222.820,128.$$

6.8 DISTRIBUŢIA *WEIBULL*

În capitolul 1 a fost prezentată funcţia densităţii de probabilitate (*f.d.p.*-ul) distribuţiei *Weibull* ca fiind:

$$f(t) = \frac{\gamma}{\theta}t^{\gamma-1}\exp\left[-\left(\frac{t^{\gamma}}{\theta}\right)\right], \qquad t \ge 0,\ \gamma \ge 1,\ \theta \ge 0$$

unde γ si θ sunt parametrii de forma şi de scară.

Când datele de defectare urmează distribuţia *Weibull*, parametrii estimaţi ai distribuţiei, $\hat{\theta}$ şi $\hat{\gamma}$ pot fi obţinuţi prin utilizarea metodei *MLE* (v.vol.I). Ca şi în cazul distribuţiei exponenţiale, prezentarea va fi făcută pentru cele 2 tipuri de încercări: ne-cenzurate şi cenzurate.

6.8.1 ÎNCERCĂRI NECENZURATE

Timpii exacţi de defectare ai celor n unităţi supuse testului sunt înregistraţi ca fiind: $t_1, t_2, \ldots t_n$. În ipoteza că timpii de defectare urmează o distribuţie *Weibull*, funcţia de verosimilitate este:

Scanned with OKEN Scanner

$$L(\gamma,\theta,t)=\left(\frac{\gamma}{\theta}\right)^{n}\prod_{i=1}^{n}t_i^{\gamma-1}e^{\frac{-t_i^{\gamma}}{\theta}} \tag{6.27}$$

Urmând o aceeaşi procedura ca şi în cazul distribuţiilor exponenţiale şi Rayleigh, se ia logaritmul ecuaţiei (6.27), se derivează în raport cu γ şi θ şi se egalează relaţiile obţinute cu zero. Rezultă două ecuaţii de forma:

$$\frac{n}{\hat{\gamma}}+\sum_{i=1}^{n}\ln t_i-\frac{1}{\hat{\theta}}\sum_{i=1}^{n}t_i^{\hat{\gamma}}\ln t_i=0 \tag{6.28}$$

$$-\frac{n}{\hat{\theta}}+\frac{1}{\hat{\theta}^2}\sum_{i=1}^{n}t_i^{\hat{\gamma}}=0 \tag{6.29}$$

MLE -le lui γ şi θ pot fi obţinute prin rezolvarea ecuaţiilor (6.28) şi (6.29), simultan. Înlocuind $\hat{\theta}$, obţinut din ec.(6.29), în ec.(6.28) se obţine diferenţa $D(\hat{\gamma})$:

$$D(\hat{\gamma})=\frac{\sum_{i=1}^{n}t_i^{\hat{\gamma}}\ln t_i}{\sum_{i=1}^{n}t_i^{\hat{\gamma}}}-\frac{1}{\hat{\gamma}}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln t_i=0 \tag{6.30}$$

Ecuaţia de mai sus în $\hat{\gamma}$ poate fi rezolvată numeric prin utilizarea metodei Newton – Raphson sau prin încercări. Odată ce este estimat $\hat{\gamma}$, se obţine $\hat{\theta}$ ca fiind:

$$\hat{\theta}=\sum_{i=1}^{n}\frac{t_i^{\hat{\gamma}}}{n}$$

Similar distribuţiei exponenţiale şi presupunând un număr mare de date despre defectări, intervalul de încredere de procent $100(1-\alpha)$ pentru γ şi θ este:

$$\hat{\gamma}-Z_{\alpha/2}\sqrt{Var(\hat{\gamma})}<\ \gamma\ <\hat{\gamma}+Z_{\alpha/2}\sqrt{Var(\hat{\gamma})} \tag{6.31}$$

$$\hat{\theta}-Z_{\alpha/2}\sqrt{Var(\hat{\theta})}<\ \theta\ <\hat{\theta}+Z_{\alpha/2}\sqrt{Var(\hat{\theta})} \tag{6.32}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $Var(\hat{\gamma})$ şi $Var(\hat{\theta})$, pentru cazul când n are valori mari, sunt obţinute după cum urmează. Se definesc mărimile:

$$S_0 = \sum_{i=1}^{n} t_i^{\hat{\gamma}} \qquad S_1 = \sum_{i=1}^{n} t_i^{\hat{\gamma}} (\ln t_i) \qquad S_2 = \sum_{i=1}^{n} t_i^{\hat{\gamma}} (\ln t_i)^2$$

Astfel, rezultă:

$$Var(\hat{\gamma}) \cong \frac{\hat{\gamma}^2 S_0^2}{n(S_0^2 + \hat{\gamma}^2 S_0 S_2 - \hat{\gamma}^2 S_1^2)}$$

$$Var(\hat{\theta}) \cong \frac{S_0}{n^2}\left(\frac{S_0}{\hat{\gamma}^2} + S_2\right) Var(\hat{\gamma})$$

$$Cov(\hat{\gamma}, \hat{\theta}) \cong \frac{S_1}{n} Var(\hat{\gamma})$$

EXEMPLUL 6.13.

10 diode sunt testate în condiţii accelerate. Timpii de defectare (minute) sunt înregistraţi în tabelul 6.10. În ipoteza că datele urmează o distribuţie Weibull, să se găsească valorile parametrilor $\hat{\gamma}$ şi $\hat{\theta}$.

Tabelul 6.10 Timpii de defectare

31.000	51.000
36.000	51.500
40.000	54.000
44.000	57.000
50.000	63.000

Rezolvare

Primul pas este obţinerea unei valori iniţiale bune pentru $\hat{\gamma}$ care să fie apoi substituită în ecuaţia (6.30). Acest lucru poate fi făcut prin utilizarea relaţiei propuse/9/ între $\hat{\gamma}$ şi CV (coeficient de variaţie) ca raportul între abaterea standard a lotului şi media acestuia:

$$\hat{\gamma} = \frac{1,05}{CV} \qquad (6.33)$$

Scanned with OKEN Scanner

Din date rezultă:

$$\bar{t} = \frac{477.500}{10} = 47.750 \text{ ore}.$$

Abaterea standard a lotului este $s = 9,886$ *şi* $CV = 0,207$

Folosind ecuaţia (6.33) se obţine o valoare iniţiala pentru $\hat{\gamma}$ *de 5. Înlocuind în ecuaţia (6.30), rezultă:*

$$\sum_{i=1}^{10} t_i^{\hat{\gamma}} \ln t_i = 3,74\times10^{25} \qquad \sum_{i=1}^{n} \ln t_i = 107,53$$

$$\sum_{i=1}^{10} t_i^{\hat{\gamma}} = 3,43\times10^{24} \qquad D(5) = -0,04921$$

Pentru a aduce valoarea lui D(γ) cât mai aproape de zero, se va relua calculul cu $\hat{\gamma} = 2,1$

$$\sum_{i=1}^{10} t_i^{\hat{\gamma}} \ln t_i = 75,758\times10^{10} \qquad \sum_{i=1}^{10} \ln t_i = 107,53$$

$$\sum_{i=1}^{10} t_i^{\hat{\gamma}} = 6,99\times10^{10} \quad \text{şi} \quad D(2,1) = -0,397345$$

În timp ce $\hat{\gamma}$ *descreşte, valoarea lui* $D(\hat{\gamma})$ *descreşte şi se depărtează de 0. Deci, se va relua calculul cu o valoare mai mare a lui* $\hat{\gamma} = 3,64$ *:*

$$\sum_{i=1}^{10} t_i^{\hat{\gamma}} \ln t_i = 13,676\times10^{18} \qquad \sum_{i=1}^{10} \ln t_i = 107,53$$

$$\sum_{i=1}^{10} t_i^{\hat{\gamma}} = 12575\times10^{18} \quad \text{şi} \quad D(3,64) = -0,15381$$

Se repetă calculul cu $\hat{\gamma} = 5,907$ *:*

$$\sum_{i=1}^{10} t_i^{\hat{\gamma}} \ln t_i = 74,636\times10^{28} \qquad \sum_{i=1}^{10} \ln t_i = 107,53$$

$$\sum_{i=1}^{10} t_i^{\hat{\gamma}} = 6,836\times10^{28} \quad \text{şi} \quad D(5,907) = -0,00396145$$

Pentru $\hat{\gamma} = 6,0$ *rezultă:*

$$\sum_{i=1}^{10} t_i^{\hat{\gamma}} \ln t_i = 20,519\times10^{29} \qquad \sum_{i=1}^{10} \ln t_i = 107,53$$

$$\sum_{i=1}^{10} t_i^{\hat{\gamma}} = 1,8791\times10^{29} \quad \text{şi} \quad D(6) = -0,0001322$$

Valoarea exacta obţinuta prin metoda Newton – Raphson este $\hat{\gamma} = 5,99697278$.

Astfel, folosind aceasta valoare a lui $\hat{\gamma}$ *se obţine:*

Scanned with OKEN Scanner

$$\sum_{i=1}^{10} t_i^{\hat{\gamma}} \ln t_i = 19{,}852\times10^{29} \qquad \sum_{i=1}^{10} \ln t_i = 107{,}53$$

$$\sum_{i=1}^{10} t_i^{\hat{\gamma}} = 1{,}817998\times10^{29} \qquad \text{şi} \qquad D(5{,}99697278) = 2{,}69800180\times10^{-16}$$

La o valoare aproximată a lui $\hat{\gamma}$ de 6, se obține valoarea lui $\hat{\theta}$ de:

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i^{\hat{\gamma}} \qquad \hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i^{\hat{\gamma}} = \frac{1}{10}\times1{,}8791\times10^{29} = 1{,}8791\times10^{28}$$

Astfel

$$R(t) = e^{\frac{-t^{\gamma}}{\theta}}$$

Fiabilitatea la t = 40.000 ore este

$$R(40.000) = 0{,}8041.$$

6.8.2. ÎNCERCĂRI CENZURATE

Se presupune ca unitățile testate sunt supuse la o cenzurare de tip 1 sau tip 2. Datele de defectare pot fi reprezentate prin:

$$t_1 \le t_2 \le t_3 \ldots \le t_r = t_{r+1}^{+} = \ldots = t_n^{+} .$$

În ipoteza că datele urmează o distribuție *Weibull*, conform ec.(6.28) se obține:

$$\frac{r}{\hat{\gamma}} + \sum_{i=1}^{r} \ln t_i - \frac{1}{\hat{\theta}}\left[\sum_{i=1}^{r} t_i^{\hat{\gamma}} \ln t_i + (n-r)t_r^{\hat{\gamma}} \ln t_r\right] = 0 \qquad (6.34)$$

$$-\frac{r}{\hat{\theta}} + -\frac{1}{\hat{\theta}^2}\left[\sum_{i=1}^{r} t_i^{\hat{\gamma}} + (n-r)t_r^{\hat{\gamma}}\right] = 0 \qquad (6.35)$$

Prin înlocuirea lui $\hat{\theta}$ din ecuația (6.35) în ecuația (6.34), se obține $D(\hat{\gamma})$ ca :

$$D(\hat{\gamma}) = \frac{\sum_{i=1}^{r} t_i^{\hat{\gamma}} \ln t_i + (n-r)t_r^{\hat{\gamma}} \ln t_r}{\sum_{i=1}^{r} t_i^{\hat{\gamma}} + (n-r)t_r^{\hat{\gamma}}} - \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} \ln t_i - \frac{1}{\hat{\gamma}} = 0 \qquad (6.36)$$

Prin încercări sau folosind metoda Newton – Raphson, se poate estima $\hat{\gamma}$ din ecuația (6.36). Valoarea estimată a lui $\hat{\theta}$ este :

Scanned with OKEN Scanner

$$\hat{\theta} = \frac{1}{r}\left[\sum_{i=1}^{r} t_i^{\hat{\gamma}} + (n-r)t_r^{\hat{\gamma}}\right]. \tag{6.37}$$

În continuare se va prezenta o metodă pentru obținerea valorilor aleatorii(ne-sistematice) ale parametrilor $\hat{\theta}$ şi $\hat{\gamma}$.

6.8.3 ESTIMĂRI ALEATORII ALE PARAMETRILOR DISTRIBUȚIEI WEIBULL

Se presupune că timpul scurs până la defectare, pentru un grup de componente testate, urmează distribuția Weibull. Se va re-scrie *f.d.p.* -ul distribuției Weibull dat de ecuația (6.26) ca:

$$f(t) = \frac{\gamma}{\theta_1}\left(\frac{t}{\theta_1}\right)^{\gamma-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{\theta_1}\right)\right]^{\gamma}, \tag{6.38}$$

unde

$$F(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\theta_1}\right)^{\gamma}\right] \quad \text{şi} \quad h(t) = \frac{\gamma}{\theta_1^{\gamma}} t^{\gamma-1}.$$

Se observă că θ_1 are legătură cu θ din ecuația (6.25) prin $\theta = \theta_1^{\gamma}$. Utilizând metoda verosimilității maxime, poate fi demonstrat că $\hat{\gamma}$ este soluția ecuației:

$$\frac{\sum_{i=1}^{r} t_i^{\hat{\gamma}} \ln t_i + (n-r)t_r^{\hat{\gamma}} \ln t_r}{\sum_{i=1}^{r} t_i^{\hat{\gamma}} + (n-r)t_r^{\hat{\gamma}}} - \frac{1}{\hat{\gamma}} = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} \ln t_i \tag{6.39}$$

Aceasta ecuație poate fi rezolvata prin folosirea metodei numerice Newton – Raphson, aşa cum a fost menționat mai devreme în acest capitol. Odată ce este determinat $\hat{\gamma}$, $\hat{\theta}_1$ poate fi estimat ca fiind:

$$\hat{\theta}_1 = \left[\frac{\sum_{i=1}^{r} t_i^{\hat{\gamma}} + (n-r)t_r^{\hat{\gamma}}}{r}\right]^{1/\hat{\gamma}} \tag{6.40}$$

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

Ecuaţiile (6.39) şi (6.40) sunt generale şi pot fi folosite atât pentru date cenzurate cat şi pentru cele complete. În cazul datelor complete, $r = n$ şi toţi termenii care includ $(n - r)$ sunt eliminaţi.

6.8.4 VARIAŢIA ESTIMĂRILOR *MLE*

Deoarece *MLE* nu poate fi prezentat într-o expresie unică, determinarea proprietăţilor estimărilor cum ar fi eroarea sistematică(deplasarea), distribuţia, ş.a., nu este simplă. Totuşi, prin utilizarea metodei *Monte Carlo* şi urmând procedura pentru construcţia matricei informaţionale, aşa cum este prezentată în subcapitolul 4.2.5, variaţiile asimptotice şi co-variaţiile *MLE* pentru încercări complete sau cenzurate sunt obţinute ca fiind/9/:

$$\begin{bmatrix} Var(\hat{\theta}_1) & Cov(\hat{\theta}_1, \hat{\gamma}) \\ Cov(\hat{\theta}_1, \hat{\gamma}) & Var(\hat{\gamma}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}\hat{\theta}_1^2 / n\hat{\gamma}^2 & c_{12}\hat{\theta}_1 / n \\ c_{12}\hat{\theta}_1 / n & c_{22}\hat{\gamma}^2 / n \end{bmatrix} \qquad (6.41)$$

unde c_{11}, c_{22} şi c_{12} depind de raportul $p = r/n$ şi iau valorile prezentate în tabelul 6.11.

Tabelul 6.11. Valoarea asimptotica a coeficienţilor utilizaţi în calcularea variaţiilor şi co-variaţiilor *MLE*, pentru încercări complete şi cenzurate

p	c_{11}	c_{22}	c_{12}
1,0	1,108665	0,607927	0,257022
0,9	1,151684	0,767044	0,176413
0,8	1,252617	0,928191	0,049288
0,7	1,447258	1,122447	-0,144825
0,6	1,811959	1,372781	-0,446603
0,5	2,510236	1,716182	-0,935766
0,4	3,933022	2,224740	-1,785525
0,3	7,190427	3,065515	-3,438610
0,2	16,478771	4,738764	-7,375310
0,1	60,517110	9,744662	-22,187207

6.8.5 ESTIMAREA OBIECTIVĂ A LUI $\hat{\gamma}$

MLE poate fi folosită pentru a oferi o estimare punctuală a lui $\hat{\gamma}$, care însă este uşor deplasată(cu eroare sistematică) pentru un n mic, mai ales când avem de-a face cu încercări cenzurate puternic. În /9/ se propune utilizarea unui *factor aleator* G_n.

Folosind acest factor, estimarea obiectivă a lui $\hat{\gamma}$ este:

$$\hat{\gamma} = G_n \hat{\gamma}_{MLE} \tag{6.42}$$

Tabele pentru determinarea G_n se pot găsi în literatura de specialitate, sau acesta poate fi calculat folosind următoarea aproximare :

$$G_n = 1,0 - 1,346/n - 0,8334/n^2 \tag{6.43}$$

Pentru cazul încercărilor complete, rezultatele asimptotice pentru $Var(\hat{\gamma})$, când $n \to \infty$, sunt date de $Var(\hat{\gamma}) = c_{22}\hat{\gamma}^2 = 0,6079\hat{\gamma}^2$. Totuşi, dacă $n < 100$, în locul folosirii valorii lui $c_{22} = 0,6079$, o estimare mai precisa a $Var(\hat{\gamma})$ este obţinută prin utilizarea lui C_n, a cărui valoare se poate lua din literatura de specialitate sau se poate calcula cu relaţia:

$$C_n = 0,617 + \frac{1,8}{n} + \frac{78,25}{n^3} \tag{6.44}$$

şi

$$Var\,(\hat{\gamma}) = \frac{C_n \hat{\gamma}^2}{n} \tag{6.45}$$

EXEMPLUL 6.14.

Un lot de 10 unităţi sunt testate până la defectare. Timpul de defectare sunt: 20, 22, 24, 25, 26, 27, 30, 35, 42, 52. Să se găsească legea de distribuţie Weibull a datelor.

Rezolvare

Folosind ecuaţiile (6.39) şi (6.40) se obţin estimările MLE :

$$\hat{\gamma} = 3,275 \quad şi \quad \hat{\theta}_1 = 33,75$$

Variaţiile corespunzătoare pot fi calculate folosind ecuaţia (6.41) şi tabelul 6.11 pentru $p = r/n = 1$ (fără cenzurare) :

$$Var(\hat{\gamma}) = c_{22}\hat{\gamma}^2/n = 0,608(3,275)^2/10 = 0,6521$$

$$Var(\hat{\theta}_1) = c_{11}\hat{\theta}_1^2/(\hat{\gamma}^2 n) = 1,109(33,75)^2/(3,275^2 \times 10) = 11,78$$

$$Cov(\hat{\theta}_1, \hat{\gamma}) = c_{12}\hat{\theta}_1^2/n = 0,257(33,75)/10 = 0,8674$$

Scanned with OKEN Scanner

Acum, folosind ecuațiile (6.38) și (6.37) se obțin următoarea valoare estimată obiectiv a lui $\hat{\gamma}$:

$$G_n = 1,0 - (1,346/10) - 0,8334/10^2 = 0,857$$

$$\hat{\gamma} = G_n \hat{\gamma}_{MLE} = 0,857 \times 3,275 = 2,81$$

și valoarea corespunzătoare a lui $\hat{\theta}_1$ *este:*

$$\hat{\theta}_1 = \left(\sum_{i=1}^{r} \frac{t_i^{\hat{\gamma}}}{r} \right)^{1/\hat{\gamma}^2} = 33,01.$$

De asemenea, se poate calcula variația valorii estimate obiectiv a lui $\hat{\gamma}$ *folosind ecuațiile (6.44) și (6.45):*

$$C_n = 0,617 + 1,8/10 + (78,25/10^3) = 0,875$$

$$Var(\hat{\gamma}) = \frac{0,875 \times 2,81^2}{10} = 0,691.$$

6.8.6 INTERVALE DE ÎNCREDERE PENTRU $\hat{\gamma}$

Rezultatele obținute /9/ indica faptul că pentru cenzurarea severă, $\hat{\gamma}$ urmează o distribuție χ^2 cu $2(r - 1)$ *df* (grade de libertate) și o distribuție χ^2 cu $(n - 1)$ *df*, atunci când încercările sunt de tip complet.

Pentru a lua în considerare aceasta transformare, se propune următoarea aproximare :

$$df = c(r-1), \tag{6.46}$$

unde

$$c = 2/[(1+p^2)^2 \, pc_{22}].$$

Odată ce a fost calculat *df*, folosind aceste expresii, intervalul de încredere, de procent $100(1-\alpha)$, pentru $\hat{\gamma}$ poate fi calculat folosind relațiile:

$$\hat{\gamma}^L = \hat{\gamma} \left[\frac{\chi^2_{(1-\alpha),df}}{cr} \right]^{\frac{1}{1+p^2}} \tag{6.47}$$

$$\hat{\gamma}^U = \hat{\gamma} \left[\frac{\chi^2_{\alpha,df}}{cr} \right]^{\frac{1}{1+p^2}}. \tag{6.48}$$

Scanned with OKEN Scanner

Indicii L şi U marchează limitele: inferioara (lower) , respectiv superioară (upper).

EXEMPLUL 6.15.

Să se determine intervalul de încredere 90% pentru $\hat{\gamma}$ estimat în exemplul 6.14.

Rezolvare

Deoarece este cazul unor încercări complete, atunci $\hat{\gamma}$ urmează o distribuţie χ^2 cu (n-1) grade de libertate :

$$\chi^2_{0,95,9} = 3,33 \qquad \chi^2_{0,05,9} = 16,92$$

$$c = 2/\left[\left(1+1^2\right)^2(1)\times 0,608\right] = 0,822$$

$$\hat{\gamma}^L = \hat{\gamma}\left[\frac{\chi^2_{0.95,9}}{cr}\right]^{\frac{1}{1+p^2}} \qquad \hat{\gamma}^L = 2,81\left[\frac{3,33}{0,822\times 10}\right]^{\frac{1}{2}} = 1,788$$

$$\hat{\gamma}^U = \hat{\gamma}\left[\frac{\chi^2_{0.05,9}}{cr}\right]^{\frac{1}{1+p^2}} \qquad \hat{\gamma}^U = 2,81\left[\frac{16,92}{0,822\times 10}\right]^{\frac{1}{2}} = 4,032$$

6.8.7 DEDUCEREA LUI $\hat{\theta}_1$

Eroarea sistematică(deplasarea de la valoarea reală) a lui $\hat{\theta}_1$ este o funcţie de θ_1 şi γ, şi nu este uşor de evaluat. Din fericire, în general, θ_1 nu este caracterizat printr-o eroare sistematică veritabilă şi folosirea în ecuaţia (6.40) a unui $\hat{\gamma}$ determinat obiectiv conduce la o estimare rezonabilă a lui $\hat{\theta}_1$.

Intervalele de încredere pentru $\hat{\theta}_1$, pot fi determinate folosind distribuţia:

$$U = \sqrt{n}\hat{\gamma}\ln\left(\frac{\hat{\theta}_1}{\theta_1}\right).$$

Se poate arăta că intervalele de încredere de procent $100(1-\alpha)$ pentru $\hat{\theta}_1$ sunt :

$$\theta_1^L = \hat{\theta}_1 \exp\left(-U_{1-\alpha/2}/(\sqrt{n}\hat{\gamma})\right) \qquad (6.49)$$

$$\theta_1^U = \hat{\theta}_1 \exp\left(-U_{\alpha/2}/(\sqrt{n}\hat{\gamma})\right) \qquad (6.50)$$

Scanned with OKEN Scanner

Elsayed /9/ oferă date tabelate pentru punctele procentuale U_α astfel ca $p(U \le U_\alpha) = \alpha$. Aproximativ, $U_{0,05}$ şi $U_{0,95}$ pot fi calculate folosind relaţiile:

$$U_{0,05} = -1,715 - (3,868/n) - (44,23/\exp(n)) \qquad (6.51)$$

$$U_{0,95} = 1,72 + (3,163/n) + (18,25/\exp(n)) . \qquad (6.52)$$

Aceste expresii sunt valabile doar pentru încercări complete.

EXEMPLUL 6.16.

Să se determine intervalul de încredere 90% pentru $\hat{\theta}_1$, estimat în exemplul 6.14.

Rezolvare

Folosind ecuaţiile (6.51) şi (6.52), se calculează valoarea distribuţiei U :

$$U_{0,05} = -1,715 - (3,868/10) - (44,23/\exp(10)) = -2,09$$

$$U_{0,95} = 1,72 + (3,163/10) + (18,25/\exp(10)) = 2,04$$

Acum, utilizând ecuaţiile (6.49) şi (6.50), se pot estima limitele, inferioară şi superioară, ale lui $\hat{\theta}_1$:

$$\theta_1^L = \hat{\theta}_1 \exp(-U_{0,95}/(\sqrt{n} \times \hat{\gamma}))$$

$$\theta_1^L = 33,01 \exp(-2,04/(\sqrt{10} \times 2,81)) = 26,2 \qquad \text{şi}$$

$$\theta_1^U = \hat{\theta}_1 \exp(-U_{0,05/2}/(\sqrt{n} \times \hat{\gamma}))$$

$$\theta_1^U = 33,01 \exp(2,09/(\sqrt{10} \times 2,81)) = 41,8$$

Pentru încercări cenzurate, U_α este o funcţie de raportul $p = r/n$ şi n şi ia valori tabelate conform /9/. Aproximativ, $U_{0,05}$ şi $U_{0,095}$, pentru cazul încercărilor cenzurate, pot fi calculate folosind următoarele relaţii:

$$U_{0,05} = -7,72 + 12,99p - 7,02p^2 + \frac{24,83}{n} + \frac{47,72}{n^2} - \frac{26,57}{np} - \frac{66,46}{(np)^2} \qquad (6.53)$$

$$U_{0,095} = 4,08 - 4,76p + 2,43p^2 + \frac{11,41}{n} - \frac{9,85}{np} + \frac{10,46}{(np)^2} \qquad (6.54)$$

Scanned with OKEN Scanner

Aceste expresii sunt valabile pentru $5 \le n \langle 120$ şi $0,5 \le p \le 1,0$.

6.9 DISTRIBUŢIA *LOG-NORMALĂ*

Când timpii de defectare urmează o distribuţie log-normală, *f.d.p.* -ul $f(t)$ este dat de:

$$f(t) = \frac{1}{\sigma t\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right)^2\right] \quad t \ge 0$$

Fie $x = \ln t$, unde x are o distribuţie normală cu media μ şi abaterea standard σ, adică:

$$E[x] = E[\ln t] = \mu$$

$$V[x] = Var[\ln t] = \sigma^2$$

Deoarece $t = e^x$, rezultă:

$$E[t] = E\left[e^x\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[x - \frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dx$$

$$E[t] = \exp\left[\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{1}{2\sigma^2}[x - (\mu+\sigma)]^2\right] dx$$

$$E[t] = \exp\left[\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right]$$

$$E\left[t^2\right] = E\left[e^{2x}\right] = \exp\left[2(\mu + \sigma^2)\right]$$

$$Var[t] = \left[e^{2\mu+\sigma^2}\right]\left[e^{\sigma^2} - 1\right]$$

dar

$$F(t) = \int_0^t \frac{1}{\tau\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln\tau - \mu}{\sigma}\right)^2\right] d\tau$$

Scanned with OKEN Scanner

$$F(t) = P(t \le t) = P\left[z \le \frac{\ln \tau - \mu}{\sigma}\right]$$

$$R(t) = P(t > t) = P\left[z > \frac{\ln \tau - \mu}{\sigma}\right]$$

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\dfrac{\phi\left(\dfrac{\ln t - \mu}{\sigma}\right)}{\sigma}}{t\sigma R(t)}$$

Estimarea parametrilor distribuției log-normale, când datele de defectare nu sunt cenzurate și când datele sunt cenzurate, este prezentată mai jos.

6.9.1 ÎNCERCĂRI NECENZURATE

Atunci când timpul T de defectare urmează o distribuție log-normala cu *f.d.p.* - ul $f(t)$,

$$f(t) = \frac{1}{t\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln t - \mu)^2\right] \tag{6.55}$$

cu media dată de: $\exp(\mu + \frac{\sigma^2}{2})$ și variația dată de : $\left[e^{\sigma^2} - 1\right]\left[e^{2\mu+\sigma^2}\right]$,

estimarea parametrilor $\hat{\mu}$ și $\hat{\sigma}$ poate fi obținuta direct din ecuația (6.55).

Uneori, una dintre cele mai simple modalități de ai obținere pe μ și σ^2, cu proprietăți optime, constă în schimbarea de variabilă $Y = \ln T$.

Se presupune că $t_1 \le t_2 \le t_3 \le \ldots \le t_n$ sunt timpii exacți de defectare a celor n unități supuse testării. *MLE* -ul lui μ și σ^2 funcție de Y conduce la:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i-1}^{n} \ln t_i \tag{6.56}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\left[\sum_{i-1}^{n} (\ln t_i)^2 - \frac{\left(\sum_{i-1}^{n} \ln t_i\right)^2}{n}\right] \tag{6.57}$$

Scanned with OKEN Scanner

Estimarea lui $\hat{\mu}$ este obiectivă. Uneori, estimarea lui $\hat{\sigma}^2$ nu este obiectivă. În acest caz, pentru a ne asigura că această estimare este obiectivă, se utilizează:

$$s^2 = \hat{\sigma}^2[n/(n-1),]$$

unde s^2 este variaţia lotului testat.

Evident, $s^2 \approx \hat{\sigma}^2$ când n este mare. Estimările mediei de viaţă şi variaţiei lui T sunt:

$$\exp(\hat{\mu} + \hat{\sigma}^2/2) \quad \text{şi, respectiv} \quad \left[e^{\hat{\sigma}^2} - 1\right] \cdot \left[e^{2\hat{\mu}+\hat{\sigma}^2}\right]$$

Intervalul de încredere, de procent $100(1-\alpha)$, pentru μ este:

$$\hat{\mu} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \hat{\mu} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{6.58}$$

Daca σ este necunoscut sau când mărimea lotului este relativ mică $(n < 25)$, atunci se înlocuieşte σ prin s şi se utilizează distribuţia *Student-t* în locul acesteia. Astfel, rezultă:

$$\hat{\mu} - t_{\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \hat{\mu} + t_{\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}} \tag{6.59}$$

În mod analog, intervalul de încredere, de procent $100(1-\alpha)$, pentru $\hat{\sigma}^2[n\hat{\sigma}^2/\sigma^2$ are o distribuţie χ^2 cu (n-1) grade de libertate] este:

$$\frac{n\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{\alpha/2,(n-1)}} < \sigma^2 < \frac{n\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,(n-1)}} \tag{6.60}$$

Inginerii sunt interesaţi de obicei de estimarea timpului mediu până la defectare şi a intervalului de încredere pentru componente ale căror timpi de defectare respectă o distribuţie log-normală. Pentru a obţine intervalul de încredere de procent $100(1-\alpha)$ pentru timpul mediu de defectare, $\hat{\tau}$, în cazul distribuţiei *Log-normale*, se ia:

$$\tau = \mu + \frac{\sigma^2}{2} \qquad \text{şi} \tag{6.61}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\hat{\tau} = \hat{\mu} + \frac{n}{(n-1)}\frac{\hat{\sigma}^2}{2}, \tag{6.62}$$

unde $\hat{\mu}$ şi $\hat{\sigma}$ sunt obținute din ecuațiile (6.55) şi (6.56).

Pentru loturi mari, $\hat{\tau}$ este aproximat printr-o distribuție normală cu variația $\sigma_{\hat{\tau}}^2$ /9/:

$$\sigma_{\hat{\tau}}^2 = Var(\hat{\mu}) + Var\left[n\hat{\sigma}^2/(n-1)\right]/4. \tag{6.63}$$

Uneori, $Var\left[n\hat{\sigma}^2/(n-1)\right] = n^2\hat{\sigma}^4/(n-1)^3$ şi $Var(\hat{\mu}) = \hat{\sigma}^2/(n-1)$.

Atunci, se poate re-scrie ec.(6.62) astfel:

$$\sigma_{\hat{\tau}}^2 = \frac{\hat{\sigma}^2}{n-1} + \frac{n^2\hat{\sigma}^4}{4(n-1)^3}. \tag{6.64}$$

Odată ce sunt obținute $\hat{\tau}$ şi $\sigma_{\hat{\tau}}^2$ folosind ec.(6.62) şi respectiv (6.64), intervalul de încredere, de procent $100(1-\alpha)$, pentru T(timpul mediu până la defectarea întregului lot) poate fi determinat astfel :

$$\exp(\hat{\tau} - Z_{1-\alpha/2}\hat{\sigma}_{\hat{\tau}}) < T < \exp(\hat{\tau} + Z_{1-\alpha/2}\hat{\sigma}_{\hat{\tau}}) \tag{6.65}$$

EXEMPLUL 6.17.

Un inginer de producție desfăşoară un test „burn-in" pe zece terminale de display video(TDV) fiind înregistrați următorii timpi de defectare(ore): 25, 29, 36, 40, 45, 47, 49, 50, 55, 60. În ipoteza că timpii de defectare urmează o distribuție log-normală, să se determine timpul mediu până la defectare şi abaterea sa standard. Care sunt intervalele de încredere 95% pentru T şi σ^2 ?

Rezolvare

Pentru a calcula parametrii distribuției, se alcătuieşte tabelul 6.12.
Folosind ec.(6.56) şi (6.57), se obține:

$$\hat{\mu} = \frac{\sum \ln t_i}{n} = \frac{37,416}{10} = 3,7416$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{10}\left[140,73 - \frac{37,416^2}{10}\right] = 0,0734$$

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 6.12 Timpii de defectare ai TDV

t_i	$\ln t_i$	$(\ln t_i)^2$
25	3,218	10,361
29	3,367	11,338
36	3,583	12,841
40	3,688	13,607
45	3,806	14,490
47	3,850	14,823
49	3,891	15,146
50	3,912	15,303
55	4,007	16,058
60	4,094	16,763
	37,416	140,73

Timpul mediu de defectare este:

$$\exp\left[\hat{\mu}+\frac{\hat{\sigma}^2}{2}\right]=\exp\left[3,7783\right]=43,74 \text{ ore}$$

Abaterea standard a timpului de defectare este:

$$\sigma=\left\{\left[\exp\left(\hat{\sigma}^2\right)-1\right]\exp\left[2\hat{\mu}+\hat{\sigma}^2\right]\right\}^{1/2}$$

$$\sigma=\left\{\left[\exp\left(0,0734\right)-1\right]\exp\left[2\times3,7416+0,0734\right]\right\}^{1/2}$$

$$\sigma=12,071 \text{ ore}$$

Intervalul de încredere 95% pentru σ^2 este:

$$\frac{n\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}}<\sigma^2<\frac{n\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}$$

$$\frac{10\times0,0734}{19}<\sigma^2<\frac{10\times0,0734}{2,7}$$

$$0,0386<\sigma^2<0,2718$$

Intervalul de încredere 95% pentru durata de viață medie T poate fi estimată folosind ecuația (6.65). Mai întâi se va estima $\hat{\tau}$ folosind ec.(6.62), apoi se va estima $\sigma^2_{\hat{\tau}}$ utilizând ec.(6.64):

$$\hat{\tau}=3,7416+\frac{10}{9}\times\frac{0,0734}{2}=3,7823$$

$$\hat{\sigma}^2_{\hat{\tau}}=\frac{0,0734}{9}+\frac{10^2\times0,0734^2}{4(10-1)^3}=0,00833$$

Scanned with OKEN Scanner

Intervalul de încredere 95% pentru timpul mediu până la defectare este:

$$e^{(3,7823-1,96\times0,0912)} < T < e^{3,7823+1,96\times0,0912)}$$

$$36,728 < T < 52,512$$

6.9.2. ÎNCERCĂRI CENZURATE

Se consideră testarea unui lot format din n unități, cu obținerea timpilor exacți de defectare a unui număr de r unități: $t_1 \le t_2 \le ... \le t_r$

Testul este cenzurat după apariția defectării cu numărul r sau la timpul T_c (presupunându-se că în acest timp apar cele r defectări). Astfel, avem tipul 2, sau 1 de cenzurare. După cum s-a arătat mai sus, se poate folosi faptul că transformarea $Y = log_e T$ are o distribuție normală cu media μ și variația σ^2. Se pot estima valorile lui μ și σ^2 prin transformarea de variabilă $y_i = ln\ t_i$. Metoda Gorban si Greenberg /9/ propune că cele mai bune estimări ale lui μ și σ^2 sunt date de combinații liniare de logaritmi ale celor r timpi exacți de defectare:

$$\hat{\mu} = \sum_{i=1}^{r} a_i \ln t_i \qquad (6.66)$$

și

$$\hat{\sigma} = \sum_{i=1}^{r} b_i \ln t_i \qquad (6.67)$$

unde a_i și b_i au fost determinați de Gorban și Greenberg pentru $n \le 20$, la fel ca și variația și covariația lui $\hat{\mu}$ și $\hat{\sigma}$.

Daca mărimea lotului este mai mare de 20, poate fi folosită metoda *MLE* pentru distribuția normala în estimarea parametrilor lognormali (încercări cenzurate) după cum se prezintă mai jos:

$$\bar{y} = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} \ln t_i \qquad (6.68)$$

$$s^2 = \frac{1}{r}\left[\sum_{i=1}^{r} (\ln t_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^{r} \ln t_i\right)^2 \setminus r\right] \qquad (6.69)$$

iar *MLE* conduce pentru $\hat{\mu}$ și $\hat{\sigma}$ la:

$$\hat{\mu} = \bar{y} - \lambda(\bar{y} - \ln t_r) \qquad (6.70)$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\hat{\sigma}^2 = s^2 + \lambda(\bar{y} - \ln t_r)^2 \tag{6.71}$$

Coeficientul λ este o funcţie de α şi β :

$$\alpha = s^2 / (\bar{y} - \ln t_r)^2 \tag{6.72}$$

$$\beta = (n-r)/n \tag{6.73}$$

După cum se observă din ec.(6.73), 100β este procentajul de unităţi cenzurate. În /9/ sunt tabelate valorile lui λ funcţie de α şi β, valori ce pot fi calculate folosind următoarea aproximare:

$$\lambda = [1{,}136\alpha^3 - \ln(1-\alpha)][1 + 0{,}437\beta - 0{,}250\alpha\beta^{1{,}3}] + 0{,}08\alpha(1-\alpha) \tag{6.74}$$

Ecuaţia (6.74) oferă o aproximare bună a lui λ, cu o eroare maxima de 5%. Variaţiile asimptotice ale lui $\hat{\mu}$ şi $\hat{\sigma}$ pot fi estimate astfel:

$$Var(\hat{\mu}) = m_1\hat{\sigma}^2 / n \tag{6.75}$$

$$Var(\hat{\sigma}) = m_2\hat{\sigma}^2 / n \tag{6.76}$$

Cohen oferă, de asemenea, valori tabelate ale lui m_1 şi m_2 ca funcţii de $\hat{c}$, unde $\hat{c} = (\ln t_r - \hat{\mu})/\hat{\sigma}$. Aproximativ, m_1 şi m_2 pot fi calculate folosind următoarele relaţii: Pentru $y < 0$,

$$m_1 = 1 + 0{,}51e^{2{,}5y} \tag{6.77}$$

$$m_2 = 0{,}5 + 0{,}74e^{1{,}6y} \tag{6.78}$$

Pentru $y > 0$,

$$m_1 = 0{,}52 + e^{(1{,}838y + 0{,}354y^2)} - 0{,}391y - 0{,}676y^2 \tag{6.79}$$

$$m_2 = 0{,}24 + e^{(y + 0{,}384y^2)} + 0{,}0507y + 0{,}2735y^2 \tag{6.80}$$

unde $y = -\hat{c}$.

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

EXEMPLU 6.18.

25 de unități sunt supuse unui test de uzură. Testul se termină când se defectează 20 de unități, iar timpii lor de defectare (în săptămâni) sunt: 25, 29, 36, 40, 45, 47, 49, 50, 55, 60, 62, 65, 67, 70, 71, 73, 75, 78, 80, 85. În ipoteza că timpii de defectare urmează o distribuție log-normală, să se determine $\hat{\mu}$ *și* $\hat{\sigma}^2$.

Rezolvare

În acest caz , $n = 25$ *iar* $r = 20$. *Folosind ec.(6.69) și (6.70), se determină mărimile* $\bar{y}$ *și* s^2, *cu ajutorul datelor din tabelul 6.13.*

Tabelul 6.13 Timpii de defectare

t_i	$\ln t_i$	$(\ln t_i)^2$
25	3,218	10,361
29	3,367	11,338
36	3,583	12,841
40	3,688	13,607
45	3,806	14,490
47	3,850	14,823
49	3,891	15,146
50	3,912	15,303
55	4,007	16,058
60	4,094	16,763
62	4,127	17,033
65	4,174	17,425
67	4,204	17,679
70	4,248	18,049
71	4,262	18,170
73	4,290	18,408
75	4,317	18,640
78	4,356	18,980
80	4,382	19,202
85	4,442	19,737
	76,044	324,053

$\bar{y} = 76,044/20 = 3,8022$; $s^2 = \frac{1}{20}\left[324,053 - 76,044^2/20\right] = 1,745$

Cu ajutorul ec. (6.72) și (6.73) se determină valorile lui α *și* β:

$$\alpha = 1,745/(3,8022-4,442)^2 = 0,952$$

$$\beta = 5/25 = 0,2$$

Din ec.(6.74) se determină valoarea lui λ*:*

$$\lambda = [1,136\times 4,263^3 - \ln(1-0,952)][1+$$

$$+0,437\times 0,2 - 0,250\times 0,952\times 0,2^{1,3}] + 0,08\times 0,952(1-0,952) = 96,328$$

Utilizând ec.(6.70) şi (6.71) se determină valorile lui $\hat{\mu}$ *şi* $\hat{\sigma}^2$*:*

$$\hat{\mu} = 3,8022 - 96,238(3,8022-4,442) = 65,375$$

$$\hat{\sigma}^2 = 1,745 + 96,328(3,8022-4,442)^2 = 41,176$$

6.10 DISTRIBUȚIA *GAMMA*

Modelul de risc *Gamma* este util pentru estimarea fiabilității în multe situații practice. Cei doi parametrii ai modelului *Gamma* sunt dați de *f.d.p.* -ul acestuia:

$$f(t;\theta,\gamma) = \frac{t^{\gamma-1}}{\theta^{\gamma}\Gamma(\gamma)} e^{-\frac{t}{\theta}} \tag{6.81}$$

unde $\Gamma(x)$ reprezintă funcția Gamma (cu valori date de literatura de specialitate), γ este parametrul de formă şi $\theta = 1/\lambda$ (λ fiind cunoscutul parametru de scară). Se observă că distribuția χ^2 este un caz special de distribuție Gamma, când $\theta = 2$ şi $\gamma = \nu/2$ (unde ν este un întreg ce reprezintă numărul de grade de libertate a distribuției χ^2). De asemenea, distribuția exponențială este un caz special de distribuție *Gamma*, când $\gamma = 1$.

6.10.1 ÎNCERCĂRI NECENZURATE

Se consideră cazul în care n unități sunt supuse unui test de fiabilitate, timpii de defectare ai tuturor unităților fiind înregistrați. Se presupune că timpii de defectare urmează o distribuție *Gamma* de doi parametri a cărui *f.d.p.*-ul este dat de ec.(6.81).

Pentru estimarea lui λ şi θ se poate utiliza metoda momentelor sau a verosimilității maxime. Deoarece ultima oferă un rezultat mai precis, ea va fi aplicată în continuare. Funcția de verosimilitate maximă pentru un lot complet este:

$$L(\theta,\gamma) = \frac{1}{\theta^{n\gamma}\Gamma^n(\gamma)}\left[\prod_{i=1}^{n} t_i\right]^{(\gamma-1)} e^{-\sum_{i=1}^{n} t_i/\theta} \tag{6.82}$$

Scanned with OKEN Scanner

Luând derivatele parţiale ale ecuaţiei (6.82) logaritmate, funcţie de θ şi γ , şi egalând ecuaţiile rezultante cu zero se obţine:

$$\hat{\theta} = \overline{t} / \hat{\gamma} \tag{6.83}$$

$$\ln \hat{\gamma} - \psi(\hat{\gamma}) - \ln \overline{t} - \ln \tilde{t} = 0 \tag{6.84}$$

unde:

$$\overline{t} = media\ aritmetica, \quad \overline{t} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{n}$$

$$\tilde{t} = media\ geometrica, \quad \tilde{t} = \left(\prod_{i=1}^{n} t_i \right)^{1/n}$$

iar funcţia ψ este definită ca $\psi(x) = \Gamma'(x) / \Gamma(x)$, unde $\Gamma'(\hat{\gamma})$ este derivata lui $\Gamma(\hat{\gamma})$ sau :

$$\Gamma'(\hat{\gamma}) = \int_0^{\infty} x^{\hat{\gamma}-1} \ln x e^{-x} dx.$$

Folosind valorile tabelate ale funcţiei ψ , ecuaţia (6.84) poate fi rezolvată prin calcule iterative. Uneori, o rezolvare mai facilă este cea aproximativă propusă de Greenwood şi Durand /9/ :

$$\hat{\gamma} = (0,50009 + 0,16488M - 0,054427M^2) / M; \quad 0 < M \le 0,5772 \tag{6.85a}$$

$$\hat{\gamma} = \frac{8,8989 + 9,0599M + 0,97754M^2}{M(17,797 + 11,968M + M^2)}; \quad 0,5772 < M \le 17 \tag{6.85b}$$

$$\hat{\gamma} = 1/M; \quad M > 17 \tag{6.85c}$$

unde $M = \ln(\overline{t} / \tilde{t})$. Această aproximare va conduce la estimări bune ale parametrilor obţinuţi prin metoda *MLE*. Odată ce este estimat $\hat{\gamma}$, se poate calcula cu uşurinţă valoarea lui $\hat{\theta}$ folosind ecuaţia (6.83).

În mod uzual, pentru un n mic, estimările parametrilor obţinute prin folosirea metodei *MLE* sunt destul de puternic deplasate(cu erori sistematice). Pentru a reduce această abatere, sunt propuse/9/ următoarele expresii ce oferă estimări obiective ale

Scanned with OKEN Scanner

lui γ şi θ :

$$\hat{\gamma}_{obiectiv} = \hat{\gamma}\frac{(n-3)}{n} + \frac{2}{3n} \tag{6.86}$$

$$\hat{\theta}_{obiectiv} = \frac{\overline{t}}{\hat{\gamma}_{obiectiv}\left[1 - 1/(\hat{\gamma}_{obiectiv} n)\right]}. \tag{6.87}$$

EXEMPLUL 6.19.

12 bare de oţel sunt supuse testului de rupere prin oboseală, încărcarea fiind de un nivel semnificativ mai mare decât limita de rezistenţă a materialului. Numărul de cicluri până la rupere, pentru fiecare bară, este: 22.000, 30.000, 45.000, 55.000, 64.000, 70.000, 85.000, 90.000, 95.000, 100.000, 105.000, 110.000.
În ipoteza că datele urmează o distribuţie Gamma, să se determine parametrii acesteia.

Rezolvare

Se calculează mărimile $\overline{t}, \tilde{t}$ *şi* M *:*

$$\overline{t} = \frac{\sum_{i=1}^{12} t_i}{12} = 72.583$$

$$\tilde{t} = \left[\prod_{i=1}^{12} t_i\right]^{\frac{1}{12}} = 65.308,65$$

$$M = \ln\left(\frac{\overline{t}}{\tilde{t}}\right) = 0,105$$

Folosind ec.(6.85a) se obţine valoarea lui $\hat{\gamma}$ *:*

$$\hat{\gamma} = \frac{1}{0,105}(0,50009 + 0,16488 \times 0,105 - 0,054427 \times 0,105^2)$$

$$\hat{\gamma} = 4,921$$

Estimările obiective pentru $\hat{\gamma}$ *şi* $\hat{\theta}$ *sunt :*

$$\hat{\gamma}_{obiectiv} = 4,921 \times \frac{9}{12} + \frac{3}{36}$$

$$\hat{\gamma}_{obiectiv} = 3,773$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\hat{\theta}_{obiectiv} = \frac{72.583}{3,773\left(1-\frac{1}{3,773\times 12}\right)} = 19.671$$

Durata medie de viață $= \hat{\theta}_{obiectiv} \cdot \hat{\gamma}_{obiectiv} = 74.218$ *cicluri*.

6.10.2 ÎNCERCĂRI CENZURATE

Când există cenzurare în datele de defectare, estimarea parametrilor devine considerabil mai dificilă. În /9/ sunt prezentate datele tabelare necesare calculării lui $\hat{\gamma}$ şi $\hat{\theta}$. Alternativ, poate fi obținută o aproximare a valorilor acestor parametri prin utilizarea următorului algoritm de calcul:

1. Se calculează media aritmetică şi geometrică a datelor oferite de testarea lotului cenzurat:

$$\overline{t_c} = \frac{\sum_{i=1}^{r} t_i}{r} \tag{6.88}$$

$$\tilde{t}_c = \left(\prod_{i=1}^{r} t_i\right)^{\frac{1}{r}} \tag{6.89}$$

2. Se calculează mărimile *NR*, *S* şi *Q* cu relațiile:

$$NR = \frac{n}{r}; \qquad S = \frac{\overline{t_c}}{t_r}; \qquad Q = \frac{1}{1-\frac{\tilde{t}_c}{\overline{t_c}}}$$

3. În final, se calculează $\hat{\gamma}_{obiectiv}$ ca o funcție de *NR*, *S* şi *Q* astfel:

- Dacă $S < 0,42$

$$\hat{\gamma}_{obiectiv} = 1,061(1-\sqrt{Q}) + 0,2522Q(1+(\sqrt{S}/NR^4)) + 1,953(\sqrt{S}-1/Q) - \\ -0,220/NR^4 + 0,1308Q/NR^4 + 0,4292/(Q\sqrt{S}) \tag{6.90}$$

Scanned with OKEN Scanner

- Când $0,42 < S < 0,80$

$$\hat{\gamma}_{obiectiv} = 0,5311 \cdot Q\left(\frac{1}{NR^2} - 1\right) + 1,436 \log Q + 0,7536(QS - S) - \\ -2,040/NR - 0,260QS/NR^2 + 2,489/(Q/NR)^{1/2} \qquad (6.91)$$

- Când $S > 0,8$

$$\hat{\gamma}_{obiectiv} = 1,151 + 1,448(Q(1-S)/NR) - 1,024(Q+S) + \\ +0,5311 \cdot \log Q + 1,541QS - 0,515(Q/NR)^{1/2} \qquad (6.92)$$

Odată ce este determinat $\hat{\gamma}$, atunci $\hat{\theta}$ poate fi estimat folosind următoarea expresie :

$$\hat{\theta}_{obiectiv} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{r} t_i + (n-r)t_r\right)/n}{\hat{\gamma}_{obiectiv}[1 - 1/(\hat{\gamma}_{obiectiv} \cdot r)]}$$

Expresiile pentru estimarea lui $\hat{\gamma}$ din etapa 3 oferă aproximări bune când $S \geq 0,12$, $1,2 \leq Q \leq 12$ şi $NR \leq 3,0$. Eroarea standard este aproximativ de 0,04.

Pentru valori mici ale lui $\hat{\gamma}(\hat{\gamma} < 1)$, eroarea maximă poate fi mare, în jurul a 10%. Pentru valori mari ale $\hat{\gamma}(\hat{\gamma} > 2)$, eroarea maximă este mai mică de 5%.

EXEMPLUL 6.20.

Un lot format din 13 componente este supus testului de fiabilitate cenzurat funcție de timp. 10 componente se defectează în timpul testării şi 3 componente supraviețuiesc perioadei de testare prestabilite la 6.000 ore. Timpii de defectare sunt: 1.500, 2.000, 3.500, 4.000, 4.500, 4.800, 5.000, 5.200, 5.400, 5.600, 6.000$^+$, 6.000$^+$. 6.000$^+$. Să se găsească distribuția Gamma pentru aceste date şi să se estimeze parametrii acesteia. Care este durata medie de viață a unei componente din acest lot ?

Rezolvare

Se calculează mărimile $\bar{t}_c, \tilde{t}$ *, NR, S şi Q :*

$$\bar{t}_c = \frac{\sum_{i=1}^{10} t_i}{10} = 4.150 \qquad \tilde{t}_c = \left(\prod_{i=1}^{10} t_i\right)^{\frac{1}{10}} = 3.848$$

Scanned with OKEN Scanner

$$NR = \frac{13}{10} = 1,3$$

$$S = \frac{\overline{t_c}}{t_r} = \frac{4.150}{6.000} = 0,691 \qquad Q = \frac{1}{1-0,927} = 13,741$$

Deoarece 0,42 < S < 0,8, se va utiliza ec.(6.91) pentru a obține estimarea obiectivă a lui $\hat{\gamma}$ *:*

$$\hat{\gamma}_{obiectiv} = 0,5311 \cdot 13,741\left(\frac{1}{1,3^2} - 1\right) + 1,436 \log 13,741 +$$

$$+0,7536\left(13,741 \cdot 0,691 - 0,691\right) - \frac{2,040}{1,3} -$$

$$-\frac{0,260 \cdot 13,741 \cdot 0,691}{1,3^2} + \frac{2,489}{\sqrt{13,741/1,3}} = 3,025$$

şi

$$\hat{\theta}_{obiectiv} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{10} t_i + 3 \cdot 6000\right)/13}{3,025 \cdot 0,966} = 1.566$$

Durata de viață medie a unei componente din acest lot este:

$\hat{\gamma}_{obiectiv} \cdot \hat{\theta}_{obiectiv} = 4737$ *ore.*

6.10.3. VARIAȚIA PARAMETRILOR $\hat{\gamma}$ ŞI $\hat{\theta}$

Pentru cazul încercărilor complete, variațiile lui $\hat{\gamma}$ şi $\hat{\theta}$ sunt funcții de γ şi n (mărimea lotului). În /9/ se propun valori tabelate ale coeficienților C_γ şi C_θ care permit estimări ale variațiilor corespondente:

$$Var\left(\hat{\gamma}\right) = \frac{C_\gamma \hat{\gamma}^2}{n} \tag{6.93}$$

$$Var\left(\hat{\theta}\right) = \frac{C_\theta \hat{\theta}^2}{n} \tag{6.94}$$

Alternativ, aceşti coeficienți pot fi calculați folosind următoarele expresii aproximante:

Scanned with OKEN Scanner

$$C_\gamma = 2,076A - 0,3697A^2 + 0,01654A^3 + 5,463B - \\ -0,3917B^2 - 7,274\sqrt{B} + 0,0006823BA^4 \tag{6.95}$$

$$C_\theta = 1,976 + \frac{0,608}{\hat{\gamma}_{obiectiv}^{1,2}} - \frac{1,8942}{n} \tag{6.96}$$

unde :

$$A = 8 - \left(\frac{1}{\hat{\gamma}_{obiectiv}}\right) \quad ; \quad B = \frac{n}{(n-6)}$$

Pentru cazul loturilor cenzurate, variaţiile lui $\hat{\gamma}$ şi $\hat{\theta}$ depind de raportul $p = r/n$. Rezultatele asimptotice ($n \to \infty$, $r/n \to p$) indică faptul că C_γ şi C_θ, şi astfel $Var\left(\hat{\gamma}\right)$ şi $Var\left(\hat{\theta}\right)$, vor fi mereu mai mari atunci când există cenzurare (aşa cum este aşteptat).

Astfel, pentru încercări cenzurate $Var\left(\hat{\gamma}\right)$ şi $Var\left(\hat{\theta}\right)$ pot fi calculate folosind relaţiile:

$$Var\left(\hat{\gamma}\right) = \frac{C_1 C_\gamma \hat{\gamma}^2}{n} \tag{6.97}$$

$$Var\left(\hat{\theta}\right) = \frac{C_2 C_\theta \hat{\theta}^2}{n} \tag{6.98}$$

unde C_1 şi C_2 sunt coeficienţi mai mari decât 1. Bazat pe rezultatele la limită, în tabelul 6.13 sunt prezentate /9/ rezultate care privesc cazul asimptotic – adică, cazul în care $n \to \infty$. Rezultatele pot fi de asemenea folosite pentru obţinerea valorilor aproximative pentru $Var\left(\hat{\gamma}\right)$ şi $Var\left(\hat{\theta}\right)$, când n este mic.

Alternativ, C_1 şi C_2 pot fi calculaţi folosind următoarele expresii (aproximante):

$$C_1 = 1 + 0,2942(1-p) + 0,5744\frac{(1-p)}{p} + 0,1021\frac{(1-p)}{p}\hat{\gamma}_{obiectiv} \tag{6.99}$$

$$C_2 = 1 + 2,848(1-p) - 6,736(1-p)^2 + 14,49(1-p)^3 + 0,3832\frac{(1-p)}{\hat{\gamma}_{obiectiv}p^2} \tag{6.100}$$

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 6.13 Coeficienții C_1 și C_2

p	C_1 $\gamma=1$	$\gamma=2$	$\gamma=3$	C_2 $\gamma=1$	$\gamma=2$	$\gamma=3$
1,00	1	1	1	1	1	1
0,75	1,293	1,343	1,370	1,691	1,600	1,573
0,50	1,806	1,944	2,027	3,337	2,921	2,799
0,25	3,237	3,592	3,843	10,069	7,696	7,040

Ecuațiile (6.95) şi (6.96) sunt valabile pentru $\hat{\gamma} > 0{,}2$ şi $n > 8$, în timp ce ecuațiile (6.99) şi (6.100) sunt valabile pentru $0{,}5 < \hat{\gamma} < 5$ şi $p > 0{,}25$. Pentru toate aceste expresii, eroarea maximă a estimării este de aproximativ 2 %.

6.10.4 INTERVALE DE ÎNCREDERE PENTRU PARAMETRUL γ

Pentru valori mari ale lui γ şi încercări complete, intervalul de încredere de procent $100(1-\alpha)$ este dat de /9/:

$$\gamma^L = \frac{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}{2nS} \quad \text{şi} \quad \gamma^U = \frac{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}{2nS} \tag{6.101}$$

unde $S = \ln(\bar{t}/\tilde{t})$. Când numărul de grade de libertate(*df*) tinde la $2(n-1)$, γ tinde la zero iar când tinde la $(n-1)$, γ tinde la ∞. Cu alte cuvinte, pentru valori mici ale lui γ, se poate folosi $df = 2(n-1)$. În celelalte cazuri se vor folosi $(n-1)$ grade de libertate. Pentru valori mici ale lui $\hat{\gamma}$, *df* (gradele de libertate) şi numitorul expresiei date de ecuația (6.101) trebuiesc corectate. Corectarea este făcută prin urmarea unei proceduri iterative.

De exemplu, pentru a găsi γ^L, se începe cu $\gamma^L = \hat{\gamma}_{obiectiv}$ şi apoi se parcurg următorii paşi:

1. Se calculează:

$$c = c(\gamma^L, n) = \frac{n\phi_1(\gamma^L) - \phi_1(n\gamma^L)}{n\phi_2(\gamma^L) - \phi_2(n\gamma^L)} \tag{6.102}$$

$$v = v(\gamma^L, n) = \left[n\phi_1(\gamma^L) - \phi_1(n\gamma^L)\right]c \tag{6.103}$$

unde:

Scanned with OKEN Scanner

$$\phi_1(x)=1+1/(1+6x) \tag{6.104}$$

$$\phi_2(x)=\begin{cases}1+1/(1+2,5x), & 0<x<2\\ 1+1/(3x), & 2\le x<\infty\end{cases} \tag{6.105}$$

2. Actualizăm γ^L folosind :

$$\gamma^L=\frac{\chi^2_{1-\alpha/2}(\nu)}{2ncS} \tag{6.106}$$

3. Se revine la pasul 1.

Aceste calcule sunt continuate până ce este obţinută convergenţa.

Prin înlocuirea lui $\chi^2_{1-\alpha/2}$ cu $\chi^2_{\alpha/2}$ şi urmând o aceeaşi procedură, poate fi estimat γ^U.

În cazul încercărilor cenzurate, poate fi aplicată aceeaşi procedură dar $\bar{t}$ şi $\tilde{t}$ trebuiesc înlocuiţi prin A_r şi respectiv G_r, unde:

$$A_r=\frac{\left[\sum_{i=1}^{r}t_i+(n-r)\,t_r\right]}{n} \tag{6.107}$$

$$G_r=\left[\left(\prod_{i=1}^{r}t_i\right)\left(t_r^{n-r}\right)\right]^{1/n} \tag{6.108}$$

Corectarea oferită de ec.(6.102) la (6.106) este necesară deoarece poate fi arătat că în timp ce pentru o valoare mare a lui γ avem,

$$2n\hat{\gamma}S\cong\chi^2(n-1),$$

pentru o valoare mică a lui γ (adică, pentru $\gamma\to 0$) se obţine,

$$2n\hat{\gamma}S\cong\chi^2(2(n-1)).$$

Scanned with OKEN Scanner

6.11. DISTRIBUȚIA *VALORII EXTREME*

Distribuția valorii extreme este utilă în modelarea fiabilității componentelor care prezintă o uzură semnificativă – adică, o rată crescătoare de defectare. Ea derivă din distribuția *Weibull*, după cum se va arăta în continuare.

F.d.p. -ul distribuției *Weibull* este :

$$f(t)=\frac{\gamma}{\theta}t^{\gamma-1}\exp\left(\frac{-t^{\gamma}}{\theta}\right) \quad t\geq 0,\ \gamma\geq 1,\ \theta>0,$$

unde γ şi θ sunt parametrii de formă şi respectiv de scară, ai distribuției.

Funcția de fiabilitate a distribuției *Weibull* este :

$$R(t)=e^{\frac{-t^{\gamma}}{\theta}} \qquad t\geq 0.$$

Se presupune că n unități sunt supuse unui test de fiabilitate încheiat după apariția a $r(r\leq n)$ defectări(tipul 2 de cenzurare). Timpii de defectare ai celor r unități urmează o distribuție *Weibull*, valorile lor fiind :

$$t_1\leq t_2\leq t_3\ldots\leq t_r\leq t_{r+1}^{+}=t_{r+2}^{+}=\ldots=t_n^{+}$$

Fie $x_1\leq x_2\leq x_3\ldots\leq x_r\leq x_{r+1}^{+}=x_{r+2}^{+}=\ldots=x_n^{+}$ valorile extreme corespondente ale duratei de viață, unde $x_i=\ln t_i$ $(i=1,2\ldots r)$ şi $x_i^{+}=\ln t_i^{+}\ (i=r,r+1\ldots n)$.

F.d.p.– ul şi funcția de fiabilitate a distribuției valorii extreme sunt :

$$f(x,a,b)=\frac{1}{b}e^{\left(\frac{x-a}{b}\right)}e^{-e^{\left(\frac{x-a}{b}\right)}} \qquad -\infty<x<\infty$$

şi

$$R(x,a,b)=e^{-e^{\left(\frac{x-a}{b}\right)}} \qquad -\infty<x<\infty,$$

unde $a=\dfrac{1}{\gamma\log\theta}$ şi $b=\dfrac{1}{\gamma}$ sunt parametrii de locație şi respectiv, scară ai distribuției valorii extreme.

Scanned with OKEN Scanner

Urmând derivatele din cap. 6.7.2, funcţia de verosimilitate pentru durate de viaţă caracteristice încercărilor complete, sau cenzurate de tip 2, este obţinută astfel :

$$L(a,b)=\prod_{i=1}^{r} f(x_i,a,b)\prod_{i=1}^{n-r} R(x_i^+,a,b)$$

sau

$$L(a,b)=\frac{1}{b^r}\exp\left[\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{x_i-a}{b}\right)-\sum_{i=1}^{r}e^{\left(\frac{x_i-a}{b}\right)}-(n-r)e^{\left(\frac{x_{r+1}^+-a}{b}\right)}\right]$$

Logaritmul funcţiei de verosimilitate este:

$$l(a,b)=-r\ln b+\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{x_i-a}{b}\right)-\sum_{i=1}^{r}e^{\left(\frac{x_i-a}{b}\right)}-(n-r)\,e^{\left(\frac{x_{r+1}^+-a}{b}\right)} \qquad (6.109)$$

Valorile estimate prin metoda verosimilităţii maxime ale lui a şi b sunt obţinute prin rezolvarea simultană a ecuaţiilor rezultate din egalarea cu zero a derivatelor, în raport cu a şi b, a ec.(6.109):

$$\frac{\partial l(a,b)}{\partial a}=\frac{-r}{b}+\frac{1}{b}\sum_{i=1}^{r}e^{\left(\frac{x_i-a}{b}\right)}+\frac{n-r}{b}e^{\left(\frac{x_{r+1}^+-a}{b}\right)}=0 \qquad (6.110a)$$

$$\frac{\partial l(a,b)}{\partial a}=\frac{-r}{b}-\frac{1}{b}\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{x_i-a}{b}\right)+\frac{1}{b}\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{x_i-a}{b}\right)e^{\left(\frac{x_{r+1}^+-a}{b}\right)}+$$
$$+\left(\frac{n-r}{b}\right)\left(\frac{x_{r+1}^+-a}{b}\right)e^{\left(\frac{x_{r+1}^+-a}{b}\right)} \qquad (6.110b)$$

Rezolvând ec.(6.110a) se poate obţine/9/ mărimea lui $\hat{a}$, funcţie de $\hat{b}$:

$$\hat{a}=\hat{b}\ln\left[\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}e^{x_i/\hat{b}}+\left(\frac{n-r}{r}\right)e^{x_{r+1}^+/\hat{b}}\right] \qquad (6.111)$$

Înlocuind ec.(6.111) în ec.(6.110b) se obţine:

Scanned with OKEN Scanner

$$-\hat{b}-\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}x_i+\frac{\sum_{i=1}^{r}x_i e^{x_i/\hat{b}}+(n-r)x_{r+1}^{+}e^{x_{r+1}^{+}/\hat{b}}}{\sum_{i=1}^{r}e^{x_i/\hat{b}}+(n-r)e^{x_{r+1}^{+}/\hat{b}}} \qquad (6.112)$$

Rezolvând ec.(6.112), rezultă estimarea lui $\hat{b}$ prin metoda verosimilității maxime.

EXEMPLUL 6.21

Producătorii de cutii negre pentru aeronave le supun unor teste de fiabilitate la impacte extrem de violente, la presiuni şi temperaturi ridicate şi la acţiunea lichidelor corozive. Ultimul test constă în scufundarea cutiei timp de 48 de ore în fiecare dintre cele 7 fluide diferite existente pe un avion, incluzând lichidul hidraulic, combustibilul, antigelul şi spuma folosită la stingerea incendiilor.
15 cutii negre sunt supuse testului cu lichid coroziv, test ce ia sfârşit cu cea de-a 10 defectare. Timpii de defectare sunt : 3,2; 5,5; 7,8; 9,5; 12,7; 14,2; 15,5; 16,4; 18,5; 23; 24,3; 26,7; 27,9; 29; 30,5 ore.
Presupunând că datele urmează o distribuţie Weibull parametrii distribuţiei se obţin cu ajutorul distribuţiei valorii extreme. Care este fiabilitatea cutiei scufundată în astfel de lichide timp de 25 ore ?

Rezolvare

Pentru a obţine parametrii distribuţiei prin metoda valorilor extreme, se transformă datele defectărilor prin logaritmare, obţinându-se : 1,163; 1,705; 2,054; 2,252; 2,542; 2,653; 2,741; 2,797; 2,918; 3,135; 3,190; 3,245; 3,329; 3,367; 3,418.
Avem de asemenea $n = 15$, $r = 10$, $n - r = 5$.
Înlocuind în ec.(6.112) se obţine:

$$-\hat{b}-\frac{1}{10}x\,40{,}502+\frac{\sum_{i=1}^{10}x_i e^{x_i/\hat{b}}+5x3{,}135e^{3{,}135/\hat{b}}}{\sum_{i=1}^{10}e^{x_i/\hat{b}}+5e^{3{,}135/\hat{b}}}=0$$

Folosind metoda Newton- Raphson în rezolvarea ecuaţiei de mai sus se obţine valoarea lui $\hat{b}$, *care înlocuită în ecuaţia (6.111) conduce la valoarea lui* $\hat{a}$. *Fiabilitatea cutiei scufundate în fluide timp de 20 ore este obţinută prin înlocuirea valorilor rezultate în ec. lui R(t).*

Scanned with OKEN Scanner

6.12 DISTRIBUȚIA *SEMI – LOGISTICĂ*

Distribuția semi – logistică este folosită de obicei în modelarea timpilor de defectare a componentelor cu rate de defectare mari. O caracteristică unică a distribuției standard semi-logistice este aceea că rata sa de risc este o funcție monoton crescătoare de x $(x=(t-\mu)\sigma)$ și tinde spre 1 când $x \to \infty$, unde t este timpul de defectare iar μ și σ sunt parametrii distribuției. Funcția densității de probabilitate și funcția cumulativă de distribuție în acest caz sunt date de:

$$g(y;\mu,\sigma) = \frac{2\exp\left(-\frac{y-\mu}{\sigma}\right)}{\sigma\left[1+\exp\left(-\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right]^2} \qquad (6.113)$$

$$G(y;\mu,\sigma) = \frac{1-\exp\left(-\frac{y-\mu}{\sigma}\right)}{1+\exp\left(-\frac{y-\mu}{\sigma}\right)}, \qquad y \geq \mu, \sigma > 0 \qquad (6.114)$$

Distribuția semi-logistică de mai sus poate fi transformată într-o distribuție semi-logistică standard introducând variabila $x=\frac{(y-\mu)}{\sigma}$. Astfel, *f.d.p.* -ul și *f.d.c.* -ul distribuției semi-logistice standard sunt:

$$f(x)=\cdots\frac{2e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}$$

$$F(x)=\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}, \qquad 0 \leq x \leq \infty$$

Funcțiile de fiabilitate și de risc sunt :

$$R(x)=\frac{2e^{-x}}{1+e^{-x}} \qquad \text{și} \qquad h(x)=\frac{f(x)}{R(x)}=\frac{1}{1+e^{-x}}$$

Scanned with OKEN Scanner

6.13. MODELE LINIARE

Când mai multe funcţii ale ratei de risc se potrivesc aceloraşi date, devine necesară discriminarea funcţiilor pentru a determina cea mai „bună" funcţie. Acest lucru poate fi realizat prin înlocuirea estimatorilor de fiabilitate obţinuţi pentru diferite funcţii de risc cu o funcţie de verosimilitate. Cea mai „bună" funcţie este una care maximizează funcţia de verosimilitate. Acest lucru poate fi uşor de obţinut când funcţiile de risc sunt liniare. După cum s-a văzut în capitolul 1, majoritatea funcţiilor de risc sunt ne-liniare. Totuşi, simple transformări pot schimba unele funcţii ne-liniare în liniare. În acest subcapitol se va ilustra utilizarea funcţiilor de risc liniare conjugate cu o funcţie de verosimilitate în vederea determinării celei mai „bune" funcţii de risc care se potriveşte unui set dat de date de defectare.

Se iau în considerare următoarele funcţii ale ratelor de risc(defectare):

- Constantă $h(t) = \lambda$
- Weibull $h(t) = \gamma/\theta\, t^{\gamma-1}$
- Rayleigh $h(t) = \lambda t$
- Gompertz $h(t) = exp\ (a + bt)$
- Exponenţial liniar $h(t) = a + bt$

Toate funcţiile ratei de risc de mai sus sunt deja funcţii liniare de timp sau pot fi liniarizate prin logaritmare. În toate cazurile, funcţia ratei liniare de risc se poate scrie ca:

$$y_i = a + bx_i$$

unde y_i este funcţia de risc estimată sau logaritmul său în intervalul de indice i, x_i este mijlocul intervalului de timp t_i sau logaritmul său iar a şi b sunt constante. Folosind metoda ponderată a celor mai mici pătrate, se va exprima suma ponderată a pătratelor (WSS) pe baza diferenţelor dintre y_i şi valoarea lui estimată $\hat{y}_i = \hat{a} + \hat{b}x_i$ pentru N intervale ca:

$$WSS = \sum_{i=1}^{N} w_i \left(y_i - \hat{a} - \hat{b}x_i\right)^2, \qquad (6.115)$$

unde w_i este ponderea.

De obicei se consideră cazul în care $w_i = 1$ sau $w_i = n_i b_i$, unde b_i şi n_i sunt întinderea şi numărul de componente testate în intervalul i. Pentru a minimiza WSS, se iau derivatele ecuaţiei (6.115) în raport cu $\hat{a}$ şi $\hat{b}$, se egalează cu zero şi se rezolvă, obţinându-se:

Scanned with OKEN Scanner

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{N} w_i (x_i - \bar{x}_w)(y_i - \bar{y}_w)}{\sum_{i=1}^{N} w_i (x_i - \bar{x}_w)},$$

şi

$$\hat{a} = \bar{y}_w - \hat{b}\bar{x}_w,$$

unde $\bar{x}_w$ şi $\bar{y}_w$ sunt ponderile medii ale lui x_i, respectiv y_i. Ele sunt exprimate ca :

$$\bar{x}_w = \frac{\sum_{i=1}^{N} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{N} w_i} \quad ; \quad \bar{y}_w = \frac{\sum_{i=1}^{N} w_i y_i}{\sum_{i=1}^{N} w_i}$$

Având estimate valorile $\hat{a}$ şi $\hat{b}$ pentru fiecare din funcțiile de risc de mai sus, fiabilitățile corespondente pot fi estimate folosind relațiile :

- Constant $R(t) = e^{-\lambda t}$
- Weibull $R(t) = e^{-t^{\gamma}/\theta}$
- Rayleigh $R(t) = e^{-\lambda t^2/2}$
- Gompertz $R(t) = \exp\left[\frac{-e^{a}}{b}(\exp(bt) - 1)\right]$
- Exponențial liniar $R(t) = \exp\left[-\left(at + \frac{1}{2}bt^2\right)\right]$

Apoi se înlocuiesc în logaritmul funcției de verosimilitate L:

$$L = \prod_{i=1}^{N-1}\left[1 - \frac{\hat{R}(t_{i+1})}{\hat{R}(t_i)}\right]^{r_i}\left[\frac{\hat{R}(t_{i+1})}{\hat{R}(t_i)}\right]^{n_i - r_i}$$

Logaritmul funcției de verosimilitate este :

$$l = \sum_{i=1}^{N-1} r_i \ln\left[1 - \frac{\hat{R}(t_{i+1})}{\hat{R}(t_i)}\right] + \sum_{i=1}^{N-1}(n_i - r_i)\ln\left[\frac{\hat{R}(t_{i+1})}{\hat{R}(t_i)}\right] \qquad (6.116)$$

Scanned with OKEN Scanner

unde n_i şi r_i reprezintă numărul de unităţi testate, respectiv numărul de unităţi defectate în intervalul i. În final, se compară valorile funcţiei de verosimilitate logaritmată a datelor observate sub diferite funcţii de risc. Apoi, se alege funcţia ratei de risc din care rezultă valoarea maximă a lui l drept cea mai „bună" funcţie.

6.14. CENZURAREA MULTIPLĂ A DATELOR

Până acum s-a avut de a face cu alegeri parametrice ale datelor timpilor de defectare pentru tipul 1 şi 2 de cenzurare şi pentru cenzurarea aleatorie. Există situaţii când poate apărea, în acelaşi test, o combinaţie de tipuri de cenzurare. De exemplu, un test de fiabilitate în care unele unităţi sunt înlocuite datorită funcţionării proaste a echipamentului de testare iar unităţile care rămân continuă să fie testate până ce se sfârşeşte perioada de testare (când un anumit număr de defectări are loc sau când se sfârşeşte o anumită perioadă de testare). Rezultatele testului conţin date multi-cenzurate. Nu există metodă parametrică adaptabilă la astfel de date. Totuşi, există două abordări cunoscute care se pot folosi în cazul unor astfel de date, numite: *estimatorul produs-limită*, propus de Kaplan şi Meier /9/ şi *estimatorul cumulativ de risc*, propus de Nelson /9/.

6.14.1 ESTIMATORUL PRODUS-LIMITĂ (EPL)

Aşa cum s-a precizat, principalul avantaj al acestui estimator constă în faptul că poate folosi date multi-cenzurate, calculele fiind simple. Estimatorul se bazează pe faptul că probabilitatea supravieţuirii unui component în intervalul de timp (t_i, t_{i+1}) este estimată ca raportul dintre numărul de unităţi care nu s-au defectat în acest interval de timp şi unităţile ce au fost supuse testării la începutul intervalului (timpul t_i). Estimarea fiabilităţii pe acest interval se obţine prin produsul tuturor rapoartelor de la timpul 0 până la t_{i+1}. Cu alte cuvinte, funcţia de fiabilitate folosind *EPL* la timpul de viaţă distinct t_j este :

$$\hat{R}_{pl}(t_j) = \prod_{l=1}^{j} (n_l - d_l)/n_l = \prod_{l=1}^{j} (1 - x_l) \qquad (6.117)$$

unde t_j este timpul de viaţă ordonat, distinct, la timpul j, $j = 1, 2, \ldots, k$ iar t_0 este timpul de start al testului; n_j şi d_j sunt numerele de unităţi testate, respectiv numerele de unităţi defecte la timpul j. Unele unităţi pot fi cenzurate după tipul 2 de cenzurare, în timpul intervalului de testare $[t_j, t_{j+1})$; dacă aceste observaţii cenzurate în timpul acestui interval se vor nota cu e_j atunci:

$$n_j = \sum_{l=j}^{k} (d_l + e_l), \qquad n_0 = n,$$

Scanned with OKEN Scanner

unde :

n = numărul total de unităţi testate;

k = timpii distincţi de defectare;

$x_j = d_j / n_j$

Ecuaţia (6.117) este estimatorul ne-parametric al funcţiei de fiabilitate caracteristic verosimilităţii maxime.

6.14.2. ESTIMATORUL CUMULATIV DE RISC (*ECR*)

Aceasta este o metodă alternativă pentru analiza datelor multi-cenzurate. Estimările funcţiilor ratei de risc şi a riscului cumulat sunt:

$$\hat{h}(t_j) = \frac{d_j}{n_j} = x_j \tag{6.118}$$

$$\hat{H}(t_j) = \sum_{l=1}^{j} \hat{h}(t_l) = \sum_{l=1}^{j} x_l \tag{6.119}$$

Conform relaţiilor din cap. 1, se poate calcula fiabilitatea folosind relaţia:

$$\hat{R}_{CH}(t_j) = \exp\left(-\sum_{l=1}^{j} x_l\right)$$

sau

$$\hat{R}_{CH}(t_j) = \prod_{l=1}^{j} \exp(-x_l) \qquad \text{pentru orice } j \in \{1, 2, \ldots\ldots k\} \tag{6.121}$$

S-a demonstrat că estimările fiabilităţii obţinute folosind *ECR* sunt mai mari decât cele obţinute prin *EPL*.

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul

7

MODELE PENTRU TESTAREA ACCELERATĂ A DURATEI DE VIAȚĂ

În capitolul precedent au fost prezentate diferite metode de bază de estimare a parametrilor distribuțiilor timpului de defectare. Au fost, de asemenea, discutate intervalele de încredere pentru valorile parametrilor. O dată distribuția timpului de cădere identificată şi parametrii ei estimați, se poate aproxima măsurile fiabilității ce prezintă interes cum ar fi: numărul aşteptat de căderi într-un interval de timp $[T_1, T_2]$ specificat şi valoarea medie a timpului de cădere. Evident, aceste măsurări sunt utile când sunt estimate din datele de defectare obținute în condiții normale de funcționare a componentelor, produselor sau sistemelor ce ne interesează. Totuşi, în multe situații - cum ar fi cazul lansării unui nou component sau a unui nou produs – datele de cădere în condiții normale de operare lipsesc şi măsurile de fiabilitate devin dificil de estimat, dacă nu chiar imposibil. Într-adevăr, există cazuri când fiabilitatea unei componente este *ridicată* şi timpul de cădere al ei în condiții normale de funcționare (condițiile de proiectare) poate să nu fie atins pe perioada duratei de viața. În aceste cazuri, testele accelerate a duratei de viața induc căderi şi timpii de defectare obținuți în aceste condiții sunt folosiți pentru a estima fiabilitatea produsului în condiții normale de operare.

7.1 TESTAREA ACCELERATĂ

Testarea accelerată a duratei de viață este, de obicei, indusă de supunerea produsului (sau componentei) la condiții mai severe de funcționare decât cele normale, numite în continuare *testări accelerate de încărcare,* sau prin utilizarea mai intensivă a produsului decât în mod normal, fără a schimba condițiile normale de operare, numite *testări accelerate ale timpului de defectare*. Este clar că aproximarea timpului de

defectare accelerat este convenabil pentru produsele sau componentele ce sunt folosite un timp de bază continuu, cum ar fi anvelopele, prăjitoare de pâine, reşouri sau becuri de iluminat.

De exemplu, în evaluarea distribuţiei timpului de cădere a becurilor de iluminat ce sunt folosite în medie 6 ore pe zi, timpul de un an al experimentului poate fi restrâns la 3 luni prin utilizarea becului timp de 24 de ore pe zi, în fiecare zi. În mod similar, distribuţia timpului de cădere a anvelopelor unui automobil ce este folosit în medie 2 ore pe zi (echivalentul a 120 km/ zi) poate fi obţinută prin analiza timpilor de cădere pe o perioadă de 70 de zile de utilizare continuă (100.000 km) în condiţii normale de rulare.

Testarea accelerată a timpului de defectare (*accelerated failure time - AFT*) este preferată testării accelerate de încărcare deoarece nu este necesar a face nici o prezumţie privind legătura dintre distribuţiile timpului de cădere în ambele tipuri de condiţii: normale şi accelerate.

Desigur, aceasta este posibil doar dacă timpul poate fi comprimat aşa cum s-a arătat mai înainte. Când nu este posibilă restrângerea duratei de viaţa a produsului in situaţia de utilizare constantă al acestuia – cum ar fi cazul unor componente ale unei unităţi de tip generator de putere, a sateliţilor de comunicare şi monitoarelor de control pentru traficului aerian – atunci estimatorii de fiabilitate ai unor astfel de produse sau componente pot fi obţinuţi prin realizarea unui test accelerat la nivele mai ridicate de încărcare (temperatură, umiditate, voltaj, vibraţii) decât cele caracteristice condiţiilor normale de utilizare.

7.2 MODELE PENTRU DATE DE DEFECTARE ACCELERATĂ

Există 3 tipuri de modele pentru legătura dintre datele de cădere în condiţii accelerate şi măsurile fiabilităţii în condiţii normale de solicitare(de proiectare).

Prezumţia de bază în legătura du datele de cădere când se utilizează oricare din modele este că acele componentele (sau produse) ce operează în condiţii normale se caracterizează prin acelaşi mecanism de defectare ce cel ce apare în condiţii de încărcare accelerată.

Modelele pot fi clasificate ca: modele statistice de bază (parametrice şi ne-parametrice), modele fizico-statistice de bază şi modele fizico-experimentale de bază /9/.

În toate aceste modele, se va presupune că nivelurile de încărcare(stres) aplicate în condiţii de testare accelerată sunt într-un interval de accelerare reală - acesta fapt are loc dacă distribuţia timpilor de cădere la un nivel ridicat de încărcare este cunoscută şi transformarea pe scala de timp la condiţii normale este, de asemenea, cunoscută.

Scanned with OKEN Scanner

În aceste condiții, se poate deriva matematic distribuțiile timpilor de defectare la condiții normale de operare (sau la orice alt nivel de încărcare). Pentru scopuri practice, se presupune că transformarea scalei de timp (referitor la un factor de accelerare, $A_F >$ 1) este constantă, ceia ce implică faptul că avem o accelerare real liniară. Astfel, relațiile dintre condițiile normale de operare (cu notația o) și cele accelerate (notate cu *s*) sunt următoarele /32/ :

- legătura dintre timpul de cădere(defectare) în condiții normale de operare și cel caracteristic condițiilor de stres este:

$$t_0 = A_F \text{ x } t_s \qquad (7.1)$$

- funcția de distribuție cumulativă este dată ca:

$$F_o(t) = F_s\left(\frac{t}{A_F}\right) \qquad (7.2)$$

- funcție densității de probabilitate este dată ca :

$$f_o(t) = \left(\frac{1}{A_F}\right) f_s\left(\frac{t}{A_F}\right) \qquad (7.3)$$

- ratele de cădere sunt date de :

$$h_o(t) = \frac{f_0(t)}{1 - F_0(t)} = \frac{(\frac{1}{A_F}) f_s(\frac{t}{A_F})}{1 - F_s(\frac{t}{A_F})}$$

$$h_o(t) = \left(\frac{1}{A_F}\right) h_s\left(\frac{t}{A_F}\right) \qquad (7.4)$$

Scanned with OKEN Scanner

7.3 MODELE PARAMETRICE STATISTICE DE BAZĂ

Modelele statistice sunt în general utilizate când legătura exactă dintre încărcările aplicate (tensiune, temperatură, umiditate, voltaj) şi timpul de cădere al componentei (sau al produsului) este dificilă de determinat pe principiile fizice sau chimice.

În acest caz, componentele sunt testate accelerat la diferite niveluri de încărcare(stres) s_1, s_2, ... Timpii de cădere de la fiecare nivel de stres sunt apoi folosiți în determinarea celei mai adecvate distribuții de probabilitate a timpilor de cădere la parametri proprii ai acelei distribuții. Conform celor stabilite mai devreme, timpii de cădere la diferite niveluri sunt liniar legați unul de altul. Mai mult chiar, distribuția timpilor de cădere la nivelul de stres s_1 se aşteaptă a fi aceeaşi cu cele de la alte nivele diferite de stres s_2, s_3, ... ca şi cu cea da la condiții normale de operare. Parametrii de formă ai distribuțiilor sunt aceeaşi pentru toate nivelurile de stres (inclusiv pentru condițiile normale) dar parametrii de scala poate fi diferiți.

Când distribuția de probabilitate a timpilor de cădere este necunoscută se pot folosi modele ne-parametrice despre care se va discuta mai târziu în acest capitol.

7.3.1 MODELUL DISTRIBUȚIEI *EXPONENȚIALE ACCELERATE*

În acest caz, timpii de defectare la un stres(încărcare) accelerat *"s"* sunt distribuiți exponențial cu parametru λ_s. Rata de risc la încărcarea s este constantă. Funcția de distribuție cumulativă (*f.d.c .-ul*) la nivelul de încărcare s este :

$$F_s(t) = 1 - e^{-\lambda_s t} \tag{7.5}$$

Folosind ecuația (7.2), *f.d.c.* -ul în condiții normale de operare este:

$$F_o(t) = F_s\left(\frac{t}{A_F}\right) = 1 - e^{-\frac{\lambda_s t}{A_F}} \tag{7.6}$$

Analog,

$$\lambda_o = \frac{\lambda_s}{A_F} \tag{7.7}$$

Rata de cădere la nivelul de stres s poate fi estimată pentru ambele tipuri de date de defectare obținute prin testări cenzurate sau ne-cenzurate, după cum urmează :

Scanned with OKEN Scanner

$$\lambda_s = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} t_i} \quad , \qquad \text{pentru informaţiile ne-cenzurate}$$

şi

$$\lambda_s = \frac{r}{\sum_{i=1}^{r} t_i + \sum_{i=1}^{n-r} t_i^{+}} \quad , \qquad \text{pentru informaţiile cenzurate,}$$

unde: t_i este timpul căderii i, t_i^+ este timpul cenzurat i, n este numărul total de unităţi aflate în testare la nivelul de stres s şi r este numărul de căderi ale unităţilor la stresul accelerat s.

EXEMPLUL 7.1

Un test accelerat al duratei de viaţă este făcut pentru 15 circuite integrate prin supunerea lor la o temperatură de 180^0C, înregistrându-se timpii de cădere. Se presupune că timpii de defectare respectă o distribuţie exponenţială cu o valoare medie a timpului de cădere în condiţii de stres, $MTTF_s$ = 8.000 de ore. Temperatura normala de operare este de 30°C iar factorul de accelerare este 50. Care este rata de cădere, timpul mediu de cădere şi fiabilitatea unui astfel de circuit integrat ce operează în condiţii normale, la timpul de 15.000 ore?

Rezolvare:

Rata de cădere la temperatură accelerată este :

$$\lambda_s = \frac{1}{MTTF_s} = \frac{1}{8000} = 1{,}25 \times 10^{-4} \text{ căderi pe oră.}$$

Folosind ecuaţia (7.7), se obţine rata de cădere în condiţii normale de funcţionare ca fiind:

$$\lambda_0 = \frac{\lambda_s}{A_F} = \frac{1{,}25 \times 10^{-4}}{50} = 2{,}5 \times 10^{-6} \text{ căderi pe oră.}$$

Timpul mediu de cădere în condiţii normale de utilizare, $MTTF_0$, este:

$$MTTF_o = \frac{1}{\lambda_0} = 400.000 \quad \text{ore.}$$

Fiabilitatea la 15.000 ore este: $R(15000) = e^{-2{,}5 \times 10^{-6} \times 1{,}5 \times 10^{4}} = 0{,}9632.$

Scanned with OKEN Scanner

Testele tipice accelerate tind să aloce unităţi egale la diferite niveluri de încărcare la care se face testul. Totuşi, unităţile testate la niveluri de stres apropiate de cele luate în calcul la proiectare sau de condiţiile de operare normale pot să nu conducă la destule căderi care să poată fi efectiv utilizate în modelele de testare accelerată. De aceea, este de preferat să se aloce mai multe unităţi pentru testele efectuate în condiţii de stres reduse decât la cele în condiţii de stres ridica astfel încât să se obţină un număr egal estimat de căderi pentru fiecare caz. Când testele sunt cenzurate, se pot folosi metodele prezentate în Capitolul 6 pentru a estima parametrii distribuţiei timpilor de cădere.

EXEMPLUL 7.2

Încărcarea puternic accelerată este un test accelerat în care componentele sunt supuse unei temperaturi ridicate, unei umidităţi atmosferice sporite, unei supra - presiuni pentru a accelera procesul de testare. Pentru a observa modul de defectare a unui dispozitiv de încuietoare cu clichet, un producător a testat accelerat prin încărcare puternică 15 de astfel de dispozitive şi a observat următorii timpi de cădere în minute: 80, 130, 250, 300, 375, 400, 600, 1000, 1200, 1350, 1500^+, 1500^+ , 1500^+ , 1500^+, 1500^+.

Semnul + indică timpul de cenzură. Acceptând un factor de accelerare de 200 şi presupunând că datele acceptă o distribuţie exponenţială, care este MTTF -ul în condiţii normale de funcţionare? Care este fiabilitatea unui dispozitiv din această populaţie la momentul t = 10000 minute?

Rezolvare:

Parametrul distribuţiei exponenţiale în condiţii accelerate se estimează după cum urmează :

$$n = 15; \qquad r = 10; \qquad \hat{\lambda} = \frac{r}{\sum_{i=1}^{r} t_i + \sum_{i=1}^{n-r} t_i^+}$$

$$\hat{\lambda} = \frac{10}{5.685 + 7.500} = 7{,}58 \times 10^{-4} \text{ căderi pe minut.}$$

Rata de cădere în condiţii normale de operare este :

$$\lambda_0 = \frac{\hat{\lambda}_s}{A_F} = 3{,}792 \times 10^{-6} \text{ căderi pe minut.}$$

MTTF este $2{,}637 \times 10^5$ minute sau 4.395 ore. Fiabilitatea la 10000 de minute este:

Scanned with OKEN Scanner

$$R(10000) = e^{-3,792\times10^{-6}\times10^{4}} = 0,9627.$$

7.3.2 MODELUL DISTRIBUŢIEI *WEIBULL ACCELERATE*

Şi în acest caz, se consideră că accelerarea este de tip ideal liniară. De aici, relaţia dintre distribuţiile timpilor de defectare în condiţii de accelerare şi normale pot fi obţinute utilizând ecuaţiile (7.2) şi (7.3):

$$F_s(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\theta_s}\right)^{\gamma_s}}, \quad t \geq 0, \quad \gamma_s \geq 1, \quad \theta_s \geq 0$$

şi

$$F_0(t) = F_s\left(\frac{t}{A_F}\right) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{A_F\theta_s}\right)^{\gamma_s}} = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\theta_0}\right)^{\gamma_s}} \tag{7.8}$$

Distribuţiile de bază a timpilor de cădere în ambele situaţii, de stres accelerat şi de operare normală, au aceeaşi parametri de formă: $\gamma_s = \gamma_0$ şi $\theta_0 = A_F\theta_s$. Parametrii de formă la diferite niveluri de stres sunt semnificativ diferiţi, şi atunci fie presupunerea ca acceleraţia este liniară nu este corectă, fie distribuţia *WEIBULL* este inadecvată pentru această analiză .

Fie $\gamma_s = \gamma_0 = \gamma \geq 1$. Atunci funcţia de densitate a probabilităţii în condiţii de operare normale este :

$$f_0(t) = \frac{\gamma}{A_F\theta_s}\left(\frac{t}{A_F\theta_s}\right)^{\gamma-1} \exp -\left(\frac{t}{A_F\theta_s}\right)^{\gamma}, \quad t \geq 0, \quad \theta_s \geq 0 \tag{7.9}$$

MTTF -ul în condiţii normale de operare este :

$$MTTF_0 = \theta_0\Gamma\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \tag{7.10}$$

Rata de hazard în condiţii normale de operare este :

$$h_0(t) = \frac{\gamma}{A_F\theta_s}\left(\frac{t}{A_F\theta_s}\right)^{\gamma-1} = \frac{h_s(t)}{A_F\gamma} \tag{7.11}$$

Scanned with OKEN Scanner

7.3.3 MODELUL DISTRIBUȚIEI *RAYLEIGH ACCELERATE*

Distribuția Rayleigh corespunde în mod adecvat creşterii liniare a ratei de defectare. Când ratele de cădere la 2 nivele diferite de stres au o creştere liniară cu timpul şi au aceleaşi pante se poate exprima rata de cădere caracteristică nivelului *s* de stres ca fiind:

$$h_s(t) = \lambda_s t \tag{7.12}$$

F.d.p. -ul pentru condiții de operare normală este:

$$f_0(t) = \frac{\lambda_s t}{(A_F)^2} e^{\frac{-\lambda_s t^2}{2(A_F)^2}} = \lambda_0 t e^{\frac{-\lambda_0 t^2}{2}} \tag{7.13}$$

unde:

$$\lambda_0 = \frac{\lambda_s}{A_F{}^2}$$

Funcția de fiabilitate la timpul *t* este :

$$R(t) = e^{\frac{-\lambda_s t^2}{2(A_F)^2}} \tag{7.14}$$

Timpul mediu de cădere în condiții normale de operare este :

$$MTTF = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda_0}} \tag{7.15}$$

EXEMPLUL 7.3

Căderea substratului de silicon şi galiu este principala cauză pentru reducerea duratei de viață a unui circuit integrat. Propagarea rupturilor prin oboseală termică în aceste substraturi reduce nivelul fiabilității la multe produse electronice ce conțin astfel de circuite integrate. Un producător de astfel de circuite integrate alege un lot de 15 unități pe care le supune funcționării la o temperatură de 225 °C şi înregistrează timpii

Scanned with OKEN Scanner

de cădere în minute: 2500, 3200, 4000, 4800, 5000, 7000, 8300, 9000, 10500, 11000, 12000, 13500, 15000$^+$, 15000$^+$ şi 15000$^+$. Semnul + indică timpii de cenzură. Se presupune că factorul de accelerare dintre încercarea accelerat şi operarea în condiţii normale este 30 şi că timpii de cădere urmăresc o distribuţie Rayleigh. Care este timpul mediu de cădere a componentelor în condiţii normale? Care este fiabilitatea la t = 25000 minute?

Rezolvare:

Parametrul distribuţiei Rayleigh la stres accelerat se obţine conform relaţiei :

$$\lambda_s = \frac{2r}{\sum_{i=1}^{r} t_i^{\,2} + \sum_{i=1}^{n-r} t_i^{+2}} \qquad (7.16)$$

unde r este numărul de unităţi căzute, n este dimensiunea lotului, t_i este timpul de cădere a componentei i şi t_i^+ este timpul de cenzură al componentei i. De aici rezultă:

$$\lambda_s = \frac{2\times 12}{8{,}3692\times 10^8 + 6{,}75\times 10^8} = \frac{24}{15{,}1192\times 10^8} = 1{,}587\times 10^{-8}$$ *căderi pe minut.*

Din ecuaţia (7.13) se obţine:

$$\lambda_0 = \frac{1}{(A_F)^2}\lambda_s = \frac{1{,}587\times 10^{-8}}{900} = 1{,}763\times 10^{-11}$$

Timpul mediu de cădere este:

$$MTTF = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda_0}} = 505 \quad \text{min.}$$

Fiabilitatea la timpul t = 25000 minute este:

$$R(25.000) = e^{\frac{-\lambda_0 t^2}{2}} = 0{,}995$$

7.3.4 MODELUL DISTRIBUŢIEI *LOG-NORMALE ACCELERATE*

Distribuţia log-normală este larg utilizata în modelarea timpilor de cădere în testări accelerate ale componentelor electronice atunci când acestea sunt supuse la temperaturi înalte de funcţionare, la câmpuri electrice mari sau la o combinaţie a acestora. Funcţia densităţii de probabilitate (*f.d.p.* -ul) unei distribuţii log-normale este :

Scanned with OKEN Scanner

$$f(t)=\frac{1}{\sigma t\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t-\mu}{\sigma}\right)^2};\quad t\geq 0 \tag{7.17}$$

Valoare medie şi variaţia distribuţiei log-normale sunt:

$$Media=e^{\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)}$$

$$Var.=\left(e^{\sigma^2}-1\right)\left(e^{2\mu+\sigma^2}\right) \tag{7.18}$$

F.d.p. -ul la stres accelerat este:

$$f_s(t)=\frac{1}{\sigma_s t\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t-\mu_s}{\sigma_s}\right)^2}$$

iar *F.d.p.* -ul în condiţii normale este :

$$f_0(t)=\frac{1}{\sigma_0 t\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t-\mu_0}{\sigma_0}\right)^2}=\frac{1}{\sigma_s t\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\ln\left(\frac{t}{A_F}\right)-\mu_s}{\sigma_s}\right]^2} \tag{7.19}$$

ceea ce implică că $\sigma_0 = \sigma_s = \sigma$. Este similar ca la modelul Weibull unde parametrul de formă este acelaşi la toate nivelurile de stres. Parametrul σ al distribuţiei log-normale este echivalent cu parametrul de formă Weibull. De asemenea, dacă σ este acelaşi la toate nivelurile de stres, atunci avem o acceleraţie real liniară. Ecuaţia (7.19) de asemenea implică faptul că parametrii μ_s şi μ_0 sunt legaţi prin: $\mu_s = \mu_0 + \ln A_F$. Relaţia dintre ratele de cădere la diferite niveluri de stres este funcţie de timp şi trebuie să fie calculată la timpi specificaţi.

Scanned with OKEN Scanner

EXEMPLUL 7.4

Elementul electric radiant al unui încălzitor este folosit în furnale pentru a menține aluminiului topit din cuvă înainte de a fi turnat în lingouri. Intervalul de temperaturi din furnal este cuprins între 700 - 900 °C, metalul fiind turnat în lingouri la 710 °C. Pentru a estima fiabilitatea cuvelor a fost efectuat un test accelerat la o temperatură de 1100 °C folosind 10 unități. Timpii lor de cădere (în ore) sunt: 2.500; 2.700; 2.800; 3.000; 3.100; 3.200; 3.450; 3.500; 3.700; .4000. Presupunem că factorul de accelerare dintre condițiile normale de operare și cele accelerate este 15, care este durata de viață medie în condiții normale presupunând că avem o distribuție log-normală?

Rezolvare:

Folosind procedura MLE, se obțin parametrii distribuției log-normale în condiții de accelerare după cum urmează :

$$\mu_s = \frac{1}{n}\sum_{1}^{10} \ln t_i = \frac{1}{10} \times 80{,}6 = 8{,}06$$

$$\sigma_s^2 = \frac{1}{n}\left[\sum_{1}^{10}(\ln t_i)^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{1}^{10} \ln t_i\right)^2\right] = 0{,}0124$$

Durata medie de viață și deviația standard în condiții de accelerare sunt :

$$\text{Durata medie} = e^{\mu_s + \frac{\sigma_s^2}{2}} = 3.184{,}98 \quad ore$$

$$\text{Deviația standard} = \sqrt{\left(e^{\sigma_s^2} - 1\right)\left(e^{2\mu_s + \sigma_s^2}\right)} = 354{,}66$$

Parametri distribuției log-normale în condiții normale de operare sunt:

$$\mu_0 = \mu_s + \ln A_F = 8{,}06 + \ln 15 = 10{,}77$$

și $\sigma_s = \sigma_0 = \sigma$. *Durata medie de viață este apoi obținută ca :*

$$e^{\mu_0 + \frac{\sigma^2}{2}} = e^{10.,7762} = 47.868 \quad ore$$

sau

Durata medie = 5,48 ani.

Este recunoscut faptul ca distribuția log-normală poate fi utilizată efectiv pentru modelarea timpilor de cădere ale circuitelor integrate când acestea sunt supuse simultan la 2 tipuri de stres accelerat – accelerare termală și accelerare a câmpului electric. În acest caz, *f.d.p.*-ul în condiții normale de operare poate fi exprimat ca :

Scanned with OKEN Scanner

$$f_0(t)=\frac{1}{\sigma_0 t\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{t}{\frac{e^{\mu_0}}{A_T A_{EF}}}\right)^{\frac{1}{\sigma_0}}\right]^2\right\} \tag{7.20}$$

unde $\sigma_0 = \sigma_s = \sigma$ - aceasta însemnând că parametrul de forma al distribuției log-normale este aceeaşi la toate nivelurile de stres. Mai mult chiar, σ si $\mu_0 - \ln A_F - \ln A_{EF}$ sunt deviația standard şi respectiv media logaritmilor timpilor de cădere. A_T şi A_{EF} sunt respectiv factorii de accelerare a câmpului termal şi a celui electric. Cantitatea $e^{\mu}/A_T A_{EF}$ poate fi considerată ca un parametru de scală. Factorul de accelerare termal A_T este raportul ratei de reacție la temperatura de stres T_s, față de cea de la temperatura T_0 în condiții normale :

$$A_T = \exp\left[\frac{E_a}{k}\left(\frac{1}{T_0}-\frac{1}{T_s}\right)\right] \tag{7.21}$$

unde E_a este energia de activare iar k este constanta Boltzman ($k= 8,623x10^{-5} eV/Kelvin$). Energia de activare reprezintă diferența dintre energia moleculelor reactante la nivelul final de stres şi energia moleculelor aflate la nivelul inițial de stres.

Factorul de accelerare a câmpului electric, A_{EF}, între câmpul electric accelerat şi cel normal este exprimat ca:

$$A_{EF} = \exp\left(\frac{E_s - E_0}{E_{EF}}\right) \tag{7.22}$$

unde E_s este câmpul de operare în condiții de stres dat în MV/cm, E_0 este câmpul normal de operare şi E_{EF} este parametrul de accelerare al câmpului electric.

Scanned with OKEN Scanner

7.4 MODELELE STATISTICE DE BAZĂ NON-PARAMETRICE

Când informațiile referitoare la timpii de cădere implică tipuri de distribuții complexe, necunoscute sau când numărul de observări este mic, făcând dificilă alegerea distribuției timpilor de cădere, utilizarea modelelor semi-parametrice sau non-parametrice par a fi foarte atractive, în comparație cu cele parametrice. Există câteva modele non-parametrice ce pot fi utilizate în modelarea informațiilor de tip timpi de defectare.

În acest paragraf sunt prezentate 2 modele non-parametrice – unul larg utilizat, cel de regresie multiplă reprezentând un model liniar şi al doilea, ce câştigă teren în modelarea fiabilității, fiind un model al ratelor de risc proporționale.

7.4.1 MODELUL *LINIAR*

Modelul standard liniar este:

$$T_i = \alpha + \beta x_i + e_i \tag{7.23}$$

sau

$$T_i = \alpha + \beta^T x_i + e_i \qquad i = 1, 2, \ldots\ldots n. \tag{7.24}$$

unde: T_i = timpul până la cădere a unității i,
x_i = vectorul covariației(stres) asociat cu timpul de cădere T_i,
β^T = vectorul coeficienților de regresie,
$e_1, e_2, \ldots\ldots e_n$ = coeficienții de erori independenți, identici cu o distribuție comună.

Modelele liniare sunt conexe cu modelele de risc având legături directe cu modelul de timp accelerat /9/. Se presupune că t_0 este timpul de supraviețuire cu rata de risc:

$$\lambda_0(t) = \frac{f_0(t)}{1 - F_0(t)} \tag{7.25}$$

De asemenea, se presupune că timpul de supraviețuire al unei componente cu vectorul de stres x are aceeaşi distribuție :

$$t_x = e^{\beta^T x} t_0 \tag{7.26}$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $\beta^{T_x} < 0$, atunci t_x este mai scurt decât t_0 şi stresul accelerează timpul până la cădere. Factorul de accelerare este:

$$A_F = e^{-\beta^T x} \tag{7.27}$$

Rata de hazard a lui t_x este:

$$\lambda_x(t) = \frac{f_x(t)}{1 - F_x(t)} \tag{7.28}$$

sau

$$\lambda_x(t) = \lambda_0\left(e^{-\beta^{T_x}} t\right) e^{-\beta^{T_x}} \tag{7.29}$$

7.4.2 MODELUL *RATELOR DE RISC PROPORŢIONALE*

Un al doilea set de modele non-parametrice sunt cele cu rate de risc proporţionale /9/. Modelul este în esenţă cu *distribuţie liberă* deoarece nu presupune adoptarea unui tip de distribuţie pentru timpii de cădere. Singura presupunere ce trebuie făcută despre timpii de defectare la testări accelerate este aceea că funcţiile ratelor de risc pentru diferite mecanisme, atunci când testarea are loc la niveluri diferite de stres, trebuie să fie proporţionale una cu alta. Nevoia de proporţionalitate poate fi satisfăcută prin utilizarea unor niveluri de stres dependente de timp sau a unor rate de risc de bază stratificate. Un mare avantaj al acestui model este acela că se poate uşor adapta la cuplarea efectelor între nivelurile de stres aplicate.

Diferit de modelele standard de regresie, modelele ratelor de risc proporţionale presupun faptul că stresurile aplicate au un efect multiplicativ asupra ratei de hazard.

Mai mult, modelul poate analiza timpi de defectare cenzuraţi, valori aflate în interdependenţă şi de timpii de cădere egali cu zero. Fiecare dintre aceste cauze, ce apar destul de des, produc dificultăţi când se utilizează analize standard.

Modelul de bază al ratelor de risc proporţionale este dat de:

$$\lambda(t; z_1, z_2, \ldots, z_k) = \lambda_0(t) exp(\beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + \ldots.. + \beta_k z_k) \tag{7.30}$$

unde:

$\lambda(t; z_1, z_2, \ldots, z_k)$ = rata de risc la timpul t pentru un dispozitiv cu variabile regresoare $z_1, z_2, \ldots, z_k$, supus testării;

$z_1, z_2, \ldots, z_k$ = variabile regresoare (stresuri aplicate);

Scanned with OKEN Scanner

$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ = coeficienţii de regresie;
$\lambda_0(t)$ = funcţie a ratei de risc ne-specificate.

Calculul variabilelor explicative ţine seama de efectele nivelurilor de stres învecinate (cum ar fi temperatura, voltajul şi umiditatea) asupra ratei de risc. De precizat că numărul variabilelor regresoare se poate să nu corespundă numărului de niveluri de stres învecinate folosite în cadrul testării accelerate a duratei de viaţă. De exemplu, când un dispozitiv este supus unui test accelerat la temperatură T şi câmp electric E, funcţia de risc poate fi exprimată funcţie de 3 regresori – $1/T$, E şi E/T. Primii 2 termeni se referă la temperatură şi la efectele câmpului electric iar ultimul defineşte interacţiunea dintre primii 2. Pentru simplificare, se presupune că numărul de regresori corespunde numărului de niveluri de stres utilizate în testul accelerat.

Este important a reaminti faptul că în modelul cu rate de risc proporţionale se presupune că raportul ratelor de hazard pentru 2 dispozitive testate la două niveluri de stres diferite (cum ar fi cele 2 temperaturi, T_0 şi T_s), $\lambda(t,T_0)/\lambda(t,T_s)$, nu variază cu timpul.

Cu alte cuvinte, $\lambda(t,T_0)$ este direct proporţională cu $\lambda(t,T_s)$ – de unde şi denumirea modelului (*proportional-hazards model - PHM*).

Necunoscutele modelului *PHM* sunt $\lambda_0(t)$ şi $\beta_i(s)$. Pentru a estima coeficienţii de regresie β_i se va folosi funcţia parţială de verosimilitate Cox /9/, după cum urmează.

Se presupune că la un lot format din n unităţi aflate în teste rezultă d timpi de cădere distincţi şi n-d timpi de cenzură. Timpii de cădere observaţi sunt $t_{(1)} < t_{(2)} < \ldots < t_{(d)}$. Pentru a estima valorile lui β se va utiliza funcţia parţială de verosimilitate $L(\beta)$, fără a specifica distribuţia timpilor de cădere:

$$L(\beta) = \prod_{i=1}^{d} \frac{e^{(\beta z_{(i)})}}{\sum_{r} e^{(\beta z_{(r)})}} \tag{7.31}$$

unde $z_{(i)}$ este variabila regresoare asociată cu unitatea ce a căzut la $t_{(i)}$. Indexul r se referă la unităţile aflate în testare la timpul $t_{(i)}$. Se va ilustra construcţia acestei funcţii $L(\beta)$ prin următorul exemplu.

EXEMPLUL 7.5

Într-un experiment accelerat al duratei de viaţă, 50 de unităţi sunt supuse la un test accelerat de temperatură cu T_1 = 150°C. O unitate cade la t = 800 ore şi testul este întrerupt la 1000 ore. Cu alte cuvinte cele 49 de unităţi rămase au supravieţuit testului.

Scanned with OKEN Scanner

Un alt test s-a făcut cu 5 unități dar la o temperatură T_2 = 300°C. Trei au căzut la timpii: 400, 600 şi 900 de ore. Două unități sunt scoase din teste după 700 ore. Rezultatele tuturor experimentelor sunt date în Tabelul 7.1

Tabelul 7.1 Informații legate de timpi de cădere

Timp(ore)	Temperatura (°C)	Observație
400	300	o cădere
600	300	o cădere
700	300	2 unit. scoase din testare
800	150	o cădere
900	300	o cădere
1.000	150	49 unit. scoase din testare

Pentru a se simplifica analiza, se determină un factor de scală s pentru variabilele regresoare (temperatura T_1 şi T_2) z_1 şi z_2 aşa încât $z_1 = 0$ şi $z_2 = 1$. Pentru a face aceasta, s - a folosit:

$$z = s\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T}\right) \qquad z_1 = 0$$

$$z_2 = s\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) = 1 \qquad z_2 = s\left(\frac{1}{150} - \frac{1}{300}\right) = 1 \qquad s = 150^0 C$$

Populația totală aflată în testare este de 55 unități. Probabilitatea ca apariția căderii unei unități particulare din cele ce au fost testate la 150°C este:

$$\frac{e^0}{50 + 5e^{\beta}}$$

Similar, probabilitatea de apariție a căderii unei unități oarecare din cele ce au fost testate la 300°C este:

$$\frac{e^{\beta}}{50 + 5e^{\beta}}$$

Când β = 0- nu există energie de activare - cele 2 probabilități sunt egale cu 1/55. Acestea înseamnă că temperatura nu are efect asupra ratei de cădere. Când $\beta > 0$, avem $e^{\beta} > e^0$ şi probabilitatea apariției unei căderi a unei unități oarecare din cele ce au fost testate la 300°C este mai mare decât cea pentru cele testate la 150°C. Putem nota că numitorul $(50+5e^{\beta})$ folosit la calcularea probabilității este o sumă ponderată în care

Scanned with OKEN Scanner

numărul de unități este ponderat de coeficientul de hazard – deci 50 este ponderat de 1 iar 5 este ponderat e^{β}. Dacă β este mic (energia de activare este mică), atunci este mai convenabil a observa prima cădere de la grupul testat la 150 °C deoarece sunt mai multe unități în testare la acea temperatură. Pe de altă parte, dacă β este mare, atunci este mai potrivit ca prima cădere să fie din grupul testat la 300 °C deoarece coeficientul de hazard $e^{\beta} > 1$ este dominant. Fiind în acest ultim caz, probabilitatea apariției unei căderi la lotul testat la 300 °C este $e^{\beta}/(50+5e^{\beta})$, acesta fiind primul termen al funcției parțiale de verosimilitate $L(\beta)$:

$$L(\beta)=\left(\frac{e^{\beta}}{50+5e^{\beta}}\right)\left(\frac{e^{\beta}}{50+4e^{\beta}}\right)\left(\frac{1}{50+e^{\beta}}\right)\left(\frac{e^{\beta}}{49+e^{\beta}}\right)$$

Cum s-a arătat mai sus, $L(\beta)$ este produsul simplu al probabilităților. Pentru a obține o estimare a lui β, se va lua logaritmul natural al funcției $L(\beta)$ și se va egala cu zero:

$$\ln L(\beta)=\sum_{i=1}^{d} z_{(i)}\beta-\sum_{i=1}^{d}\ln\left(\sum_{r} e^{\beta z(r)}\right)$$

și

$$\frac{\partial \ln L(\beta)}{\partial \beta}=0$$

Deoarece $\lambda(t;Z)=\lambda_0(t)e^{\beta Z}$, funcția de fiabilitate este obținută astfel:

$$R(t;Z)=e^{-\int_0^t \lambda(t)e^{\beta Z}dt}=R_0(t)\exp(Z\beta) \qquad (7.32)$$

unde Z este vectorul stresului aplicat, β este vectorul coeficienților de regresie și $R_0(t)$ este funcția de bază a fiabilității când $Z = 0$. Pentru a obține $R_0(t)$ se va utiliza metoda tabelară /9/. În primul rând se grupează datele pe intervale $I_1, I_2, \ldots I_k$ astfel încât $I_j = (b_0 + \ldots + b_{j-1}, b_0 + \ldots + b_j)$, $j = 1, \ldots k$ este dimensiunea b_j cu $b_0 = 0$ și $b_k = \infty$. Metoda consideră că funcția de hazard este o funcție de forma:

$$\lambda_0(t) = \lambda_j, \quad t \in I_j, \quad j = 1, \ldots, k.$$

Luăm $\beta = \hat{\beta}$ ca estimare a funcției parțiale de verosimilitate pentru a obține verosimilitatea maximă estimată maximă a lui λ_j:

$$\hat{\lambda}_j=\frac{d_j}{S_j} \qquad (7.33)$$

unde d_j este numărul de căderi în I_j și:

Scanned with OKEN Scanner

$$S_j = b_j \sum_{l \in R_j} e^{Z_l \beta} + \sum_{l \in D_j} \left(t_l - b_1 - \ldots - b_{j-1}\right) e^{Z_l \beta}$$

unde R_j este numărul de unități testate la $b_0 + \ldots + b_j - 0$ și D_j este setul de unități căzute în intervalul I_j . Estimarea corespunzătoare pentru funcția de bază a fiabilității pentru $t \in I_j$ este:

$$\hat{R}_0(t) = \exp\left[-\hat{\lambda}_j\left(t - \sum_0^{j-1} b_l\right) - \sum_1^{j-1} \hat{\lambda}_j b_i\right] \qquad (7.34)$$

Ecuația (7.34) este o funcție continuă de timp.

Modelul ratelor de risc proporționale este de asemenea capabil a modela ratele de hazard în testări accelerate a duratei de viață când stresurile aplicate (covariațiile) sunt dependente de timp. Exemplele de covariații dependente de timp includ încărcarea în trepte, creșterea liniară cu timpul a câmpului electric aplicat și ciclurile de temperatură.

7.5 MODELE FIZICO – STATISTICE DE BAZĂ

Aceste modele utilizează efectul stresului aplicat asupra ratei de risc a unităților aflate în testare. De exemplu, rata de cădere a multor circuite integrate este accelerată de temperatură și modelul care leagă rata de cădere cu temperatura poate reflecta proprietățile fizice și chimice ale unităților. Mai mult, deoarece unitățile sunt de obicei testate la același nivel de stres și toți timpii de cădere sunt evenimente aleatoare, expresia ratei de cădere poate, de asemenea, reflecta distribuția de bază a timpilor de cădere. În următorul paragraf sunt prezentate asemenea modele pentru ambele situații: cu un singur tip de stres aplicat sau mai multe.

7.5.1 MODELUL *ARRHENIUS*

Temperatura ridicată este cel mai des folosit stres de mediu în testări accelerate a duratei de viață a dispozitivelor microelectronice. Efectul temperaturii asupra acestor elemente este în general modelat folosind rata caracteristică reacției tip Arrhenius, ecuația dată de :

$$r = Ae^{-(Ea/KT)} \qquad (7.35)$$

unde: r - viteza de reacție,

A – constantă necunoscută non-termică,

Scanned with OKEN Scanner

E_a – energia de activare (eV); energie pe care moleculele trebuie să o aibă înainte de a intra în reacție,
K – constanta Boltzman ($8.623x10^{-5}$ eV/k),
T – temperatura în grade Kelvin.

Energia de activare (E_a) este un factor ce determină panta curbei ratei de reacție cu temperatura, deci descrie efectul accelerației temperaturii asupra ratei de reacție și se exprimă în electroni volți (eV). Pentru cele mai multe aplicații, E_a este tratată ca o pantă a curbei decât ca un nivel de energie. O valoare mică a lui E_a indică o pantă mică sau o reacție ce are o mică dependență de temperatură. Pe de altă parte, o valoare mare a E_a indică un grad ridicat de dependență cu temperatura.

Presupunând că durata de viață a unității testate este proporțională cu rata de reacție inversă a procesului. atunci ecuația (7.35) poate fi re-scrisă ca :

$$L = Ae^{+(Ea/kT)}$$

Duratele de viață ale unităților la o temperatură normală de operare L_0 și la o temperatură accelerată L_s sunt legate prin :

$$\frac{L_0}{L_s} = \frac{e^{(E_a/kT_0)}}{e^{(E_a/kT_s)}}$$

sau

$$L_0 = L_s \exp\frac{E_a}{k}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_s}\right) \qquad (7.36)$$

Când durata medie de viță L_0 în condiții normale de operare este calculată și distribuția de bază este exponențială, atunci rata de cădere la temperatura normală de operare este :

$$\lambda_0 = 1/L_0$$

și factorul de accelerare termică este :

$$A_T = L_0/L_s$$

sau

$$A_T = \exp\left[\frac{E_a}{k}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_s}\right)\right] \qquad (7.37)$$

Scanned with OKEN Scanner

EXEMPLUL 7.6

Un test accelerat are loc la 250°C. Se presupune că timpul mediu de cădere a dispozitivelor microelectronice testate ar fi de 5000 ore iar energia de activare este de 0,180eV. Care este durata de viaţă aşteptată în condiţii normale de temperatură la 60°C?

Rezolvare:

Durata medie de viaţă în condiţii de testare accelerată este L_s = 5000 de ore, temperatura de testare fiind T_s = 250 + 273 = 523K şi temperatura normală de operare este T_0 = 60 + 273 = 333K. Atunci :

$$L_0 = 5000 \exp\left[\frac{0{,}180}{8{,}623x10^{-5}}\left(\frac{1}{333}-\frac{1}{523}\right)\right] = 48.737 \quad ore$$

Factorul de accelerare este :

$$A_T = \exp\left[\frac{0{,}180}{8{,}623x10^{-5}}\left(\frac{1}{333}-\frac{1}{523}\right)\right] = 9{,}75$$

Mai simplu, aceasta este raportul dintre L_o şi L_s : 48.737/5000 = 9,75.

7.5.2 MODELUL *EYRING*

Modelul Eyring este similar cu modelul Arrhenius. De aceea, este des utilizat pentru modelarea informaţiilor de cădere când stresul accelerat este temperatura. Este mult mai general decât modelul Arrhenius deoarece poate modela informaţiile din testarea accelerată de temperatură la fel de bine ca şi alte tipuri singulare de stres cum ar fi câmpul electric. Modelul *Eyring* pentru teste accelerate de temperatură este :

$$L = \frac{1}{T}\exp\left[\frac{\beta}{T} - \alpha\right] \tag{7.38}$$

unde β şi α sunt constante determinate pentru date ale testului accelerat, L este durata medie de viaţă şi T este temperatura în grade Kelvin. Aşa cum arată ecuaţia (7.38), distribuţia de bază a timpului de cădere este exponenţială. Deci, rata de hazard λ este $1/L$. Relaţia dintre duratele de viaţă în condiţii de testare accelerată şi cele în condiţii normale se obţine după cum urmează.

Durata medie de viaţă la condiţii de stres accelerat este:

Scanned with OKEN Scanner

$$L_s = \frac{1}{T_s}\exp\left[\frac{\beta}{T_s} - \alpha\right] \tag{7.39}$$

Durata medie de viaţă în condiţii normale de operare este:

$$L_0 = \frac{1}{T_0}\exp\left[\frac{\beta}{T_0} - \alpha\right] \tag{7.40}$$

Împărţind ecuaţia (7.40) la ecuaţia (7.39), se obţine :

$$L_0 = L_s\left(\frac{T_s}{T_0}\right)\exp\left[\beta\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_s}\right)\right] \tag{7.41}$$

Factorul de accelerare este :

$$A_F = L_0/L_s$$

Constantele α şi β se pot obţine prin metoda verosimilităţii maxime, rezolvând următoarelor două ecuaţii pentru l mostre testate la diferite niveluri de stres şi r_i căderi ($i = 1,2,...,l$) observate la nivelul de stres V_i. Ecuaţiile sunt rezultatele derivărilor funcţiei de verosimilitate în raport cu α şi respectiv β, egalate cu zero :

$$\sum_{i=1}^{l} R_i - \sum\left[R_i / \left(\hat{\lambda}_i V_i\right)\right]\exp\left[\alpha - \beta\left(V_i^{-1} - \overline{V}\right)\right] = 0 \tag{7.42}$$

$$\sum_{i=1}^{l}\left(R_i / \left(\hat{\lambda}_i V_i\right)\right)\left(V_i^{-1} - \overline{V}\right)\exp\left[\alpha - \beta\left(V_i^{-1} - \overline{V}\right)\right] = 0 \tag{7.43}$$

unde $\hat{\lambda}_i$ =rata de risc estimată la stresul V_i,

$$R_i = \begin{cases} r_i - \text{dacă locaţia parametrului este cunoscută} \\ r_i - 1 \text{ - dacă locaţia parametrului este necunoscută} \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\overline{V} = \frac{\sum_{i=1}^{l} \frac{R_i}{V_i}}{\sum_{i=1}^{l} R_i}$$

V – variabila de stres; dacă este temperatura, V este în grade Kelvin.

EXEMPLUL 7.11

O lot de 20 de unități este supus unui test accelerat la 300 °C. Timpii de cădere (în ore) sunt dați în tabelul 7.2. Se utilizează modelul Eyring pentru a estima durata medie de viață la 60 °C. Care este factorul de accelerare ?

Tabelul 7.2 Timpii de cădere

150	6.200
1.230	6.500
1.250	6.650
1.300	7.500
1.550	7.700
2.100	9.100
2.300	9.600
3.250	9.850
3.750	10.100
4.000	10.500

Rezolvare:

Folosind informațiile din tabelul 7.2. se estimează durata medie de viață la stres accelerat (300 °C) ca fiind:

$$L_s = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} t_i = 5229 ore$$

Constanta α este obținută prin substituirea datelor în ecuația (7.42), după cum urmează:

$$20 - \frac{20 \times 5229}{573} \exp\left[\alpha - \beta\left(\frac{1}{573} - \frac{1}{573}\right)\right] = 0$$

sau

Scanned with OKEN Scanner

$$20 - 182{,}51e^{\alpha} = 0$$

$$\alpha = -2{,}211$$

Constanta β se obține prin substituirea datelor în ecuația (7.43), după cum urmează :

$$5229 = \frac{1}{573}\exp\left[\frac{\beta}{573} - \alpha\right]$$

sau

$$\frac{\beta}{573} - \alpha = 14{,}913$$

$$\beta = 7.278{,}17$$

Durata medie de viață în condiții normale la 60 °C este :

$$L_0 = 5.229\left(\frac{573}{333}\right)\exp\left[7.728{,}17\left(\frac{1}{333} - \frac{1}{573}\right)\right]$$

$L_0 = 8{,}26x10^4$ *ore.*

7.5.3. MODELUL *REGULII PUTERII INVERSE*

Distribuția de bază a duratei de viață a acestui model este de tip Weibull. Timpul mediu de cădere (de viață) scade când se aplică a - *n* - a putere a stresului (de obicei voltajul). Legea puterii inverse este exprimată prin :

$$L_s = \frac{C}{V_s^n}; \quad C > 0 \tag{7.44}$$

unde L_s este durata medie de viață la stresul accelerat V_s iar C şi n sunt constante. Durata medie de viață în condiții normale este:

$$L_0 = \frac{C}{V_0^n} \tag{7.45}$$

De aceea :

$$L_0 = L_s\left(\frac{V_s}{V_0}\right)^n \tag{7.46}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a obţine estimările lui C şi n, se modifică ecuaţia (7.44) fără ai schimba caracterul de bază /25/:

$$L_i = \frac{C}{\left(V_i / \dot{V}\right)^n} \tag{7.47}$$

unde L_i este durata medie la nivelul de stres V_i şi $\dot{V}$ este ponderea mediei geometrice a mărimilor V_i, fiind dată de :

$$\dot{V} = \prod_{i=1}^{k} (V_i)^{R_i / \sum_{i=1}^{k} R_i} \tag{7.48}$$

unde $R_i = \gamma_i$ (numărul de căderi la nivelul de stres V_i) sau $R_i = \gamma_i - 1$ depinzând de faptul dacă parametrul de formă a distribuţiei timpului de cădere se cunoaşte sau nu. Funcţia de verosimilitate a lui C şi n este :

$$\prod_{i=1}^{k} \Gamma^{-1}(R_i) \left[\frac{R_i}{C}\left(\frac{V_i}{\dot{V}}\right)^n\right]^{R_i} \left(\hat{L}_i\right)^{R_i - 1} \exp\left[-\frac{R_i \hat{L}_i}{C}\left(\frac{V_i}{\dot{V}}\right)^n\right]$$

unde $\hat{L}_i$ este durata medie de viaţă estimată la stresul V_i. Verosimilitatea maximă a estimatorilor $\hat{C}$ şi $\hat{n}$ se obţine prin rezolvarea următoarelor două ecuaţii:

$$\hat{C} = \frac{\sum_{i=1}^{k} R_i \hat{L}_i \left(V_i / \dot{V}\right)^{\hat{n}}}{\sum_{i=1}^{k} R_i} \tag{7.49}$$

$$\sum_{i=1}^{k} R_i \hat{L}_i \left(\frac{V_i}{\dot{V}}\right)^{\hat{n}} \log \frac{V_i}{\dot{V}} = 0 \tag{7.50}$$

Variaţiile asimptotice ale lui $\hat{n}$ şi $\hat{C}$ sunt:

Scanned with OKEN Scanner

$$\sigma_n^2 = \left[\sum_{i=1}^{k} R_i \left(\log \frac{V_i}{\dot{V}}\right)^2\right]^{-1} \tag{7.51}$$

$$\sigma_C^2 = C^2 \left(\sum_{i=1}^{k} R_i\right)^{-1} \tag{7.52}$$

7.5.4 MODELUL *COMBINAT*

Acest model este similar modelului Eyring de stres multiplu, când temperatura şi alt stres cum ar fi voltajul sunt utilizate în teste accelerate ale duratei de viaţă. Esenţa este că modelul reacţiei Arrhenius şi modelul regulii puterii inverse sunt combinate pentru a forma acest model. El este valid atunci când parametrul de formă al distribuţiei Weibull este egal cu 1 în modelul regulii puterii inverse /9/. Modelul este dat de :

$$\frac{L_0}{L_s} = \left(\frac{V_0}{V_s}\right)^{-n} \exp\left[E_a / k\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_s}\right)\right], \tag{7.53}$$

unde: L_0 = durata de viaţă în condiţii normale,
L_s = durata de viaţă în condiţii de stres accelerat,
V_0 = voltaj normal de operare,
V_s = voltaj de stres accelerat,
T_s = temperatura de stres accelerat,
T_0 = temperatura normală.

EXEMPLUL 6.12

Loturi de tranzistori bipolari cu durată lungă de viaţă pentru cablurile submarine sunt testate în condiţii de accelerare la temperatură şi voltaj. Durata de viaţa medie la testarea combinată temperatură-voltaj este dată in tabelul 7.3. Presupunând o energie de activare de 0,3 eV, să se estimeze durata medie de viaţă în condiţii de funcţionare normale la 30 ℃ şi 25V.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 7.3 Durata de viața medie la condiții de stres

Temperatura (°C)	Voltaj aplicat (V)			
	50	100	150	200
60	1700	1400	1100	900
70	1400	1100	900	700

Rezolvare:

Substituind în ecuația (7.53) și folosind datele de la două nivele de stres rezultă că :

$$\frac{1700}{1100}=\left(\frac{50}{100}\right)^{-n}\exp\left[\frac{0,3}{8.623\times10^{-5}}\left(\frac{1}{333}-\frac{1}{343}\right)\right]$$

Rezolvând ecuația de mai sus se obține n =0,189. De aceea:

$$L_0=L_s\left(\frac{V_0}{V_s}\right)^{-n}\exp\left[\frac{E_a}{k}\left(\frac{1}{T_0}-\frac{1}{T_s}\right)\right]$$

$$L_0=1100\left(\frac{25}{50}\right)^{-0,189}\exp\left[\frac{0,3}{8,623\times10^{-5}}\left[\frac{1}{303}-\frac{1}{343}\right]\right]$$

$L_0 = 1700,4$ *ore.*

Factorul de accelerare este egal cu:

$$\frac{1700,4}{1100}\cong1,55$$

7.6 MODELE FIZICO – EXPERIMENTALE DE BAZĂ

Timpul de cădere a multor dispozitive și componente poate fi estimat fie bazându-ne pe mecanismul fizic de cădere fie prin dezvoltarea unei baze teoretice pentru mecanismele de cădere sau prin conducerea unor experimente folosind diferite niveluri ale parametrilor ce afectează timpul de cădere. Sunt multe mecanisme de cădere rezultate din aplicarea de stresuri diferite la diferite niveluri. De exemplu, timpul de cădere (*TTF*) a circuitelor integrate placate cu silicon supuse fenomenului de electro-migrație este afectat de densitatea curentului ce trece prin circuit și de temperatura la care lucrează. Similar, timpul de cădere a unor componente poate fi afectată doar de umiditatea relativă.

Scanned with OKEN Scanner

7.6.1 MODELUL *ELECTROMIGRAŢIEI*

Electro-migraţia este transportul de către curentul din micro-circuit a atomilor metalului conductorilor. Dacă, la un conductor de aluminiu, densitatea curentului de electroni este suficient de mare, se creează un efect de curent(vânt) de electroni.

Deoarece mărimea şi masa unui electron sunt mici comparabil cu a unui atom, energia cinetică de la coliziunea într-un atom de aluminiu cu un electron este mică. Dacă destui electroni se află în coliziune cu un atom de aluminiu, atunci atomul de aluminiu se va mişca gradual cauzând o deplasare la polul negativ al conductorului. Aceasta conduce la apariţia de găuri sau depuneri de-a lungul conductorului, depinzând de microstructura locală, cauzând o cădere catastrofală. Media timpului de cădere (*MTF*) în prezenţa electro-migraţiei este dată de ecuaţia /9/ :

$$MTF = AJ^{-n}e^{E_a/kT}, \tag{7.54}$$

unde A, n sunt constante, J este densitatea curentului, k este constanta Boltzman, T este temperatura absolută şi E_a este energia de activare ($\cong 0{,}6eV$ pentru aluminiu şi $\cong 0{,}9eV$ pentru aur). Exponentul electro-migraţiei n se află în intervalul de la 1 la 6.

Pentru a determina duratele de viaţă ale componentelor în condiţii normale, se efectuează un test accelerat a duratei de viaţă pe mostre din aceste componente prin supunerea lor la diferite stresuri. În cazul electro-migraţiei, stresul poate fi curentul electric şi temperatura.

Pentru un curent fixat, se poate estima media de viaţă la temperatura de operare ca fiind :

$$\frac{t_{50}(T_0)}{t_{50}(T_s)} = \exp\left[\frac{E_a}{k}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_s}\right)\right], \tag{7.55}$$

unde $t_{50}(T_i)$ este media de viaţă la T_i ($i = 0$ sau s).

Similar, se poate fixa temperatura şi varia densitatea curentului. În acest caz :

$$\frac{t_{50}(J_0)}{t_{50}(J_0)} = \left(\frac{J_0}{J_s}\right)^{-n}.$$

Scanned with OKEN Scanner

7.6.2 CĂDERI DEPENDENTE DE *UMIDITATE*

Coroziunea în circuitul integrat plastic poate deteriora ieşirile circuitului capsulat sau metalizarea interconectărilor din interiorul circuitului. Ingredienţii de bază necesari pentru coroziune sunt umiditatea şi ionii pentru formarea unui electrolit, metalul pentru electrozi şi un câmp electric. Dacă ceva lipseşte dintre cele enumerate, coroziunea nu are loc.

Modelul general al umidităţii este :

$$t_{50} = A(RH)^{-\beta} \qquad \text{sau} \qquad t_{50} = Ae^{-\beta(RH)}$$

unde t_{50} este media de viaţă a dispozitivului, A şi β sunt constante şi RH este umiditatea relativă. Totuşi realizarea unui test accelerat bazat numai pe umiditate necesită ani de testări pentru a obţine rezultate semnificative. De aceea, temperatura şi umiditatea sunt de obicei combinate pentru testare, testarea făcându-se cu stres puternic accelerat. Cea mai comună formă de testare accelerată este testul 85/85 unde dispozitivele sunt testate la o umiditate relativă de 85 % şi o temperatură de 85°C. Voltajul este de obicei adăugat la acest stres pentru a reduce durata testului. Timpul de cădere a dispozitivului ce operează în condiţii de temperatură, umiditate relativă şi voltaj este exprimat ca fiind:

$$t = ve^{\frac{E_a}{kT}} e^{\frac{\beta}{RH}} \tag{7.56}$$

unde: t – timp de cădere,
v – voltaj amplificat,
E_a – energia de activare,
k – constanta Boltzman,
β - o constantă,
RH – umiditate relativă.

Notaţiile "*s*" şi "*0*" sunt caracteristice condiţiilor de stres accelerat şi, respectiv normale. Factorul de accelerare se obţine din :

$$A_F = \frac{t_0}{t_s} = \frac{v_0}{v_s} e^{\frac{E_a}{k}\left[\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_s}\right]} e^{-\beta\left[\frac{1}{RH_0} - \frac{1}{RH_s}\right]} \tag{7.57}$$

Scanned with OKEN Scanner

7.6.3 CĂDERI DATORATE *OBOSELII*

Când cicluri repetate de stres sunt aplicate materialului, căderile de oboseală apar uzual mai mult la stres mic decât la ultimul nivel de rezistență al materialului datorită unei acumulări a degradării. Oboseala materialului supus la cicluri de solicitare poate conduce la inițierea de micro-fisuri în puncte de discontinuitate, defecte în material, acolo unde concentratorii de eforturi au valori ridicate. Mărimea fisurii creşte la un ciclu repetat de stres continuu până când, depăşindu-se limita de rezistență a materialului, se produce ruperea, în secțiunea periculoasă respectivă. Este important de ştiut faptul că stresul aplicat cauzator de căderi prin oboseală nu este neapărat nevoie să fie o forță sau un moment, ci el poate fi, de asemenea, şi temperatura sau voltajul. Eficiența componentelor sau dispozitivelor supuse căderii prin oboseala materialului este adesea exprimată în numărul de cicluri de stres aplicați, corespunzând unei probabilități cumulative de cădere dată. Un model tipic de cădere de oboseală a unei suduri este dată de /9/:

$$N_f(x\%) = \frac{1}{2}\left[\frac{2\varepsilon}{F}\frac{h}{L_D \Delta\alpha \Delta T_e}\right]^{\frac{-1}{c}}\left[\frac{\ln(1-0{,}01x)}{\ln(0{,}5)}\right]^{\frac{1}{\beta}} \qquad (7.58)$$

unde: $N_f(x\%)$ – numărul de cicluri(durata de viață la oboseală) ce corespunde unui procent de căderi de $x\%$,
ε - ductilitatea(maleabilitatea) sudurii,
F – factor experimental,
h şi L_D – dimensiunile sudurii,
$\Delta\alpha$ - un factor al diferenței coeficientului de deformare termică a componentelor,
ΔT_e – intervalul de ciclu termic efectiv,
C – o constantă legată de temperatura medie de realizare a sudurii,
$\beta = 4$, pentru suprafața mai puțin prelucrată.

7.7 MODELE DE DEGRADARE

Cele mai mute date referitoare la fiabilitate, pentru cazul testărilor accelerate, sunt măsurări ale timpilor de cădere obținuți prin testarea unor mostre din respectivele unități la stresuri diferite. Totuşi, sunt multe situații în care căderea unităților se petrece la nivele de stres apropiate de condițiile normale, fără a avea o cădere catastrofală dar degradarea fiind cumulativă cu trecerea timpului. În asemenea cazuri, măsurările

Scanned with OKEN Scanner

degradărilor caracteristicilor de interes (acelea a căror cădere poate duce la căderea totală) se face frecvent în timpul testelor. Datele de degradare sunt apoi analizate şi folosite în predicţia timpul de cădere în condiţii normale. Este evident că nu există un model general de degradare care să poată fi folosit pentru toate sistemele sau componentele lor.

7.7.1 MODELUL DE DEGRADARE A *REZISTORILOR*

Mecanismul de degradare a unui circuit integrat rezistor poate fi descris astfel /9/:

$$\frac{\Delta R(t)}{R_0} = \left(\frac{t}{\tau}\right)^m, \tag{7.59}$$

unde: $\Delta R(t)$ – schimbarea rezistenţei la timpul t,
R_0 – rezistenţă iniţială,
t – timpul,
τ – timpul necesar schimbării 100% a rezistenţei,
m – o constantă.

Dependenţa de temperatură este inclusă în τ:

$$\tau = \tau_0 e^{\frac{E_a}{kT}} \tag{7.60}$$

unde τ_0 este o constantă.

Înlocuind ecuaţia (7.60) în (7.59), prin logaritmare se obţine :

$$\ln\left(\frac{\Delta R(t)}{R_0}\right) = m\left[\ln(t) - \ln(\tau_0) - \frac{E_a}{kT}\right]$$

sau

$$\ln(t) = \ln(\tau_0) + \frac{1}{m}\ln\left(\frac{\Delta R(t)}{R_0}\right) + \frac{E_a}{kT} \tag{7.61}$$

O dată ce constantele m şi τ_0 sunt determinate, se poate folosi ecuaţia (7.61) pentru a calcula schimbarea rezistenţei în orice moment. Ecuaţia de mai sus poate fi

Scanned with OKEN Scanner

folosită, de asemenea, pentru a estima durata de viaţă a unui dispozitiv supus căderii prin electro-migraţie(timpul de cădere potrivit modelului electro-migraţiei este dat de ecuaţia (7.54)). Logaritmarea naturală a ecuaţiei (7.54) conduce la :

$$\ln(MTF) = \ln(A) - n\ln(J) + \frac{E_a}{kT}, \tag{7.62}$$

Se observă că ecuaţiile (7.61) şi (7.62) sunt identice.

Constantele m şi τ_0 pot fi obţinute utilizând procedura standard de regresie multiplă.

7.7.2 MODELUL DE DEGRADARE A *LASERULUI*

O diodă laser este o sursă de radiaţii ce foloseşte emisia simulată. Din cauza unei densităţi mari de curent, un larg exces al sarcinii de încărcare este generat în banda de conducţie a laserului astfel încât o puternică emisie simulată poate avea loc. Performanţa diodei laser este puternic afectată de curentul conducător(de acţionare). De aici, rezultă că parametrul de degradare ce trebuie a fi observat este schimbarea în timp a curentului. Folosind modelul degradării prezentat în /9/, rezultă :

$$\frac{D(t)}{D_0} = \exp\left[-\left(\frac{t}{\tau_d}\right)^p\right], \tag{7.63}$$

unde: $D(t)$ – schimbarea parametrului de degradare la momentul de timp t,
D_0 – valoarea iniţială a parametrului de degradare,
τ_d, p – constante.

Apoi, liniarizând ecuaţia (7.63) prin logaritmare de două ori, se obţine :

$$\ln\left[\ln\left(\frac{D(t)}{D_0}\right)\right] = -p[\ln(t) - \ln(\tau_d)] \tag{7.64}$$

Parametrii p şi τ_d pot fi obţinuţi în mod similar modelului anterior.

Scanned with OKEN Scanner

7.8 PLANURI DE TESTARE ACCELERATĂ A DURATEI DE VIAŢĂ

Tipul stresului accelerat de aplicat asupra unui dispozitiv(sistem), componentă sau parte a lui ce trebuie testată depinde de modelele de cădere şi de mediul înconjurător în care dispozitivul va opera în condiţii normale. De exemplu, dacă componenta va fi supusă unor solicitări ciclice, atunci testul de oboseală accelerată va da predicţia adecvată a duratei de viaţă a componentei respective, pentru condiţii normale de funcţionare. Similar, dacă componenta va opera într-un mediu cald şi umed, atunci testarea într-o cameră cu temperatură şi umiditate adecvate va simula mediul cu cele mai ridicate niveluri de stres.

Întrebările principale ce trebuie să ni le punem în scopul demarării efective a unui test accelerat al duratei de viaţă sunt următoarele :

- Ce tipuri de stres trebuiesc aplicate dispozitivului sau componentei ?
- La ce niveluri de stres trebuie testat dispozitivul sau componenta ?
- Care este numărul de unităţi ce trebuie testat la fiecare nivel de stres ?

Cum s-a menţionat mai înainte, tipul de stres ce trebuie aplicat depinde de funcţiile actuale ale dispozitivului sau componentei funcţionând în condiţii normale. De exemplu, dacă dispozitivul are multe conexiuni fizice şi va fi folosit la bordul unui avion, atunci un test de vibraţii pare adecvat a fi făcut. Mai mult, dacă nivelul relativ de umiditate în cabina piloţilor este mai mare de 30% atunci accelerarea umidităţii trebuie inclusă în test. De asemenea, mecanismul de cădere(deteriorare), poate dicta tipul de stres care va fi aplicat. În tabelul 7.4 este prezentat un sumar al unor mecanisme de defectare pentru dispozitive electronice şi stresurile corespunzătoare induse de mecanismul respectiv /9/.

În alegerea nivelurilor de stres, este necesar a se stabili cel mai mare stres care va fi utilizat deoarece acesta conduce la condiţii extreme de funcţionare pentru modelul de cădere presupus. Pasul următor este de a concepe testele în două sau mai multe condiţii de stres (incluzând nivelul cel mai ridicat de stres) în fiecare caz. Cel mai puţin un procent de $200P$ (unde P este procentul de timp al distribuţiei de defectare) din unităţi vor trebui să cedeze in timpul testului efectuat la cel mai ridicat nivel de stres. Mai mult, cel mai puţin un procent de $100P$ din unităţi vor trebui să cedeze în timpul testului efectuat la cel mai scăzut nivel de stres. Evident că pot fi utilizate şi alte planuri de testare care minimizează costul sau maximizează informaţia obţinută.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 7.4 Mecanisme de cădere şi stresurile corespunzătoare

Mecanism de cădere	Stres aplicat
Electromigrație	Densitate de curent Temperatură
Rupturi termice	Putere disipată Temperatură
Coroziune	Umiditate Temperatură
Oboseală mecanică	Cicluri repetate de încărcare Vibrații
Oboseală termică	Cicluri repetate de schimbare a temperaturii

Numărul de unități alocate fiecărui nivel de stres este invers proporțional cu stresul aplicat. Cu alte cuvinte, mai multe unităţi de testat trebuie alocate la nivelurile de stres mai joase decât la cele mai ridicate deoarece proporțiile mai mari de căderi sunt la nivelurile ridicate de stres. Când se realizează un test de stres accelerat al duratei de viață, aranjamentele trebuie astfel făcute încât să se asigure că defectările unităților sunt independente una de alta şi că, condițiile de testare sunt aceleaşi pentru toate unitățile testate. De exemplu, când se realizează un test accelerat de temperatură, aranjamentele trebuie să asigure că distribuția de temperatură este uniformă în toată încăperea.

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul

8

PROCESE DE REPARARE ŞI NUMĂRUL AŞREPTAT DE DEFECTĂRI

Una dintre cele mai frecvent căutate mărimi este numărul aşteptat de căderi(defectări) ale sistemului pe un interval de timp *(0, t]*. Această cantitate este utilizată în determinarea schemei de întreținere preventivă optimă şi ca un criteriu pentru acceptarea testelor de fiabilitate. Mai târziu se va exemplifica pe un test tipic de fiabilitate când *n* unități (componente sau sisteme) sunt alese aleatoriu dintr-un lot de producție. Ele sunt supuse la condiții de testare specifice şi întregul lot de producție este acceptat dacă *x (x < n)* sau mai multe unități reuşesc să treacă testul la timpul *t*.

Mult mai important, această cantitate este extrem de utilă producătorilor în estimarea costului garanției. Ca un exemplu, se consideră cazul când producătorul acceptă să înlocuiască, gratis, produsul atunci când el cade înainte de perioada *T* (perioada de garanție). Se presupune că *M(T)* este numărul aşteptat de înlocuiri (reparări) pe perioada de garanție. Atunci costul aşteptat al garanției este:

$$C(T) = c \cdot M(T) \tag{8.1}$$

unde *c* este costul fix pe înlocuire. Evident, costul garanției este puternic afectat de numărul de înlocuiri şi dacă producătorul produce un număr foarte mare de unități, acesta devine crucial pentru producător să determine *M(T)* cu o acurateţe foarte mare.

Rolul lui *M(T)* în estimarea costului garanției pentru o politică de garanție dată şi pentru determinarea perioadelor optime de înlocuire preventivă pentru sistemele reparabile este discutată în capitolele 9 şi 10. În paragrafele următoare sunt prezentate două aproximări diferite pentru determinarea *M(T)*. Prima aproximare, *una parametrică*, este folosită când distribuția timpilor de cădere a unităților este cunoscută. A doua aproximare, *una non-parametrică*, este utilizată când timpii de cădere sunt singurii parametri cunoscuți.

8.1 ESTIMAREA PARAMETRICĂ A FUNCŢIEI *M(T)*

Când distribuţia timpurilor de cădere este cunoscută, se poate determina numărul aşteptat de căderi (sau reparări/recondiţionări) pe durata intervalului *(0, t]* prin utilizarea fie a aproximării de *timp continuu* sau celei de *timp discret.*

8.1.1 TIMP CONTINUU

Această aproximare este una teoretică de înlocuire(reparare). Se consideră cazul când o unitate operează până la defectare. Înainte de cădere unitatea este fie înlocuită de una nouă identică fie se repară până respectă condiţiile originale/iniţiale. Acesta este considerat ca un proces de reînnoire şi poate fi definit formal ca o secvenţă interminabilă de independenţă, distribuită identic, de variabile aleatoare non-negative.

Pentru a determina numărul aşteptat de căderi în intervalul *(0, t],* se vor defini următoarele notaţii, conform fig. 8.1. /9/:

$N(T)$ = numărul de căderi în intervalul *(0, t]*,

$M(t)$ = numărul aşteptat de căderi în intervalul *(0, t]* = $E[N(t)]$, unde E denotă aşteptările,

t_i = lungimea intervalului de timp dintre căderile *i-1* şi *i*,

r = timpul total pană la a r-a cădere: $r = t_1+t_2+...+t_r = \sum_{i=1}^{r} t_i$.

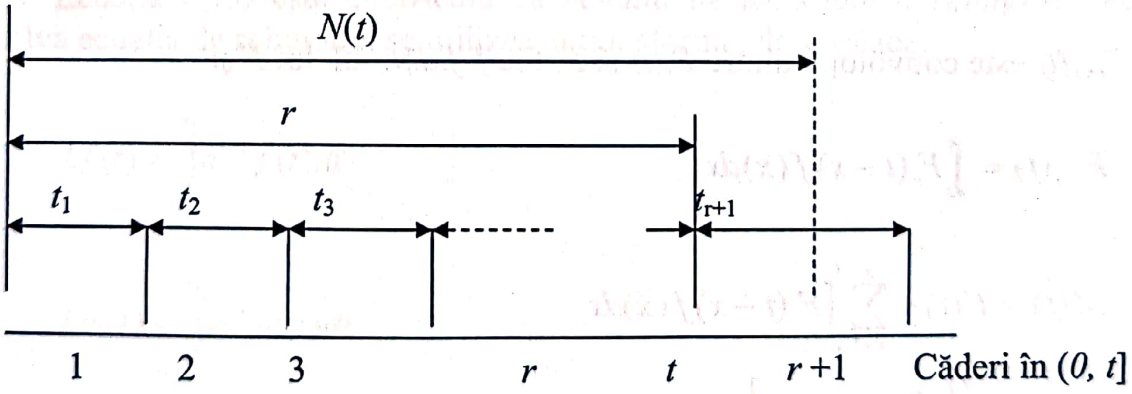


Figura 8.1

Probabilitatea ca numărul de căderi $N(t) = s$ este aceeaşi cu probabilitatea ca t să fie pentru s şi căderea $(r+1)$. De aceea,

$P[N(t) < r] = 1-F_r(t)$,

unde $F_r(t)$ este o funcţie de distribuţie cumulativă a lui $S_r => F_r(t) = P[S_r \leq t]$ şi

Scanned with OKEN Scanner

$$P[N(t) > r] = F_{r+1}(t)$$

Dar

$$P[N(t)<r] + P[N(t) = r] + P[N(t)>r] = 1.$$

Astfel,

$$P[N(t) = r] = F_r(t) - F_{r+1}(t)$$

Valoarea aşteptată a lui $N(t)$ este atunci :

$$M(t) = \sum_{r=0}^{\infty} rP[n(t) = r]$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} r[Fr(t) - Fr + 1(t)]$$

sau

$$M(t) = \sum_{r=1}^{\infty} F_r(t) \qquad (8.2)$$

$M(t)$ este definit ca o funcție de reînnoire. Ecuația (8.2) poate fi scrisă ca :

$$M(t) = F(t) + \sum_{r=1}^{\infty} F_{r+1}(t)$$

unde $F_{r+1}(t)$ este convoluția dintre $F_r(t)$ şi F. Fie f *f.d.p.* -ul lui F şi

$$F_{r+1}(t) = \int_0^t F_r(t-x) f(x) dx$$

şi

$$M(t) = F(t) + \sum_{r=1}^{\infty} \int_0^t F_r(t-x) f(x) dx$$

$$= F(t) + \int_0^t \left[\sum_{r=1}^{\infty} F_r(t-x) \right] f(x) dx$$

deci,

$$M(t) = F(t) + \int_0^t M(t-x) f(x) dx \qquad (8.3)$$

Ecuația (8.3) este denumită *ecuația fundamentală de reînnoire.*

Folosind transformarea Laplace în ambii membrii ai ecuației (8.3), se obține:

Scanned with OKEN Scanner

$$M^*(s) = \frac{f^*(s)}{s[1-f^*(s)]}, \tag{8.4}$$

unde

$$f^*(s) = E\left[e^{-sS_{N(t)}}\right] = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

şi $M(t)=L^{-1}M^*(s)$ este inversa Laplace a lui $M^*(s)$. Densitatea de reînnoire $m(t)$ este dată de derivata lui $M(t)$:

$$m(t) = dM(t)/dt$$

şi este interpretată a fi probabilitatea ca o reînnoire să apară în intervalul $[t, t+\Delta t]$. În cazul unui proces Poisson, densitatea de reînnoire $m(t)$ este rata Poisson, λ.

Se poate, de asemenea, scrie :

$$m(t) = \sum_{r=1}^{\infty} f_r(t)$$

sau

$$m(t) = f(t) + \int_0^t m(t-x)f(x)dx \tag{8.5}$$

Ecuaţia (8.5) este cunoscută ca *ecuaţia de densitate a reînnoirii*. Pentru a rezolva ecuaţia de reînnoire, se utilizează transformatele Laplace:

$$Lf(t) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

şi

$$Lm(t) = \int_0^\infty e^{-st} m(t)dt$$

Utilizând proprietatea de convoluţie a transformatelor, rezultă :

$$Lm(t) = Lf(t) + Lm(t)Lf(t)$$
$$m^*(s) = f^*(s) + m^*(s)f^*(s)$$
$$m^*(s) = \frac{f^*(s)}{1-f^*(s)}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$M^*(s) = \frac{f^*(s)}{s[1 - f^*(s)]} \qquad (8.6)$$

şi

$$f^*(s) = \frac{m^*(s)}{1 + m^*(s)}.$$

EXEMPLUL 8.1

O componentă care arată o rată constantă de cădere este înlocuită înainte de cădere de o componentă identică. F.d.p. -ul distribuţiei timpului de cădere este:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

Care este numărul aşteptat de căderi în intervalul (0, t] ?

Rezolvare

Luând transformata Laplace a f.d.p. -lui, rezultă că:

$$f^*(s) = \frac{\lambda}{s + \lambda}.$$

Transformata Laplace a densităţii de reînnoire devine:

$$m^*(s) = \frac{\lambda}{s + \lambda - \lambda} = \frac{\lambda}{s}.$$

Inversa expresiei de mai sus este:

$$m(t) = \lambda \qquad t \geq 0.$$

Astfel,

$$M(t) = \lambda t \quad t \geq 0$$

şi acesta este numărul de căderi în (0, t], λt.
Se va considera acum un exemplu numeric pentru cazul cu rată constantă de cădere.

EXEMPLUL 8.2

Un sistem are o rată constantă de cădere de 6×10^{-6} căderi pe oră. Care este numărul aşteptat de căderi după un an de funcţionare? Notă: sistemul este reparat înainte de cădere şi revine la condiţiile originale.

Rezolvare

Transformata Laplace a f.d.p. cu rata de hazard λ constantă este:

Scanned with OKEN Scanner

$$f^*(s) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} e^{-st} dt = \frac{\lambda}{s+\lambda}$$

Substituind în ecuația (8.4), se obține:

$$M^*(s) = \frac{\frac{\lambda}{s+\lambda}}{s\left[1-\frac{\lambda}{\lambda+s}\right]} = \frac{\lambda}{s^2}$$

Inversa lui $M^*(s)$ la $M^*(t)$ este: $M(t) = \alpha^{-1}\frac{\lambda}{s^2}$

Numărul așteptat de căderi după un an de funcționare (10^4 ore) este: $6x10^{-6}x10^4=0,06$.

8.1.1.1 *Analiza disponibilității după reînnoire*

Se consideră cazul când o cădere apare, se repară şi componenta devine ca nouă. Fie T_i durata perioadei de funcționare i şi D_i timpul de cădere al sistemului pentru a i-a reperare sau înlocuire. Avem o secvență aleatoare $\{X_i = T_i + D_i\}$ $i = 1,2,....$, după cum arată figura 8.2.

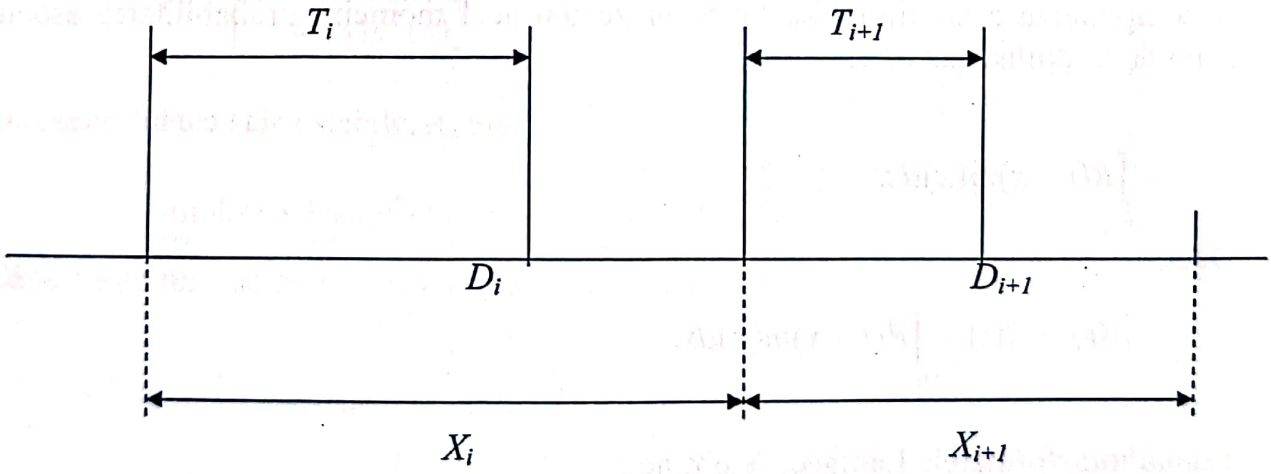


Figura 8.2

Se presupune că T_i este *i.i.d.* cu o funcție de distribuție cumulativă $W(t)$ şi funcția de densitate a probabilității $w(t)$. D_i este *i.i.d.* cu *f.d.c.* -ul $G(t)$ şi *p.d.f.* -ul $g(t)$. Densitatea de bază $f(t)$ a procesului de reînnoire este convoluția dintre w şi g. Deci :

$$Lf(t) = Lw(t)Lg(t)$$

Sau

Scanned with OKEN Scanner

$$f^*(s) = w^*(s)g^*(s)$$

De aceea,

$$m^*(s) = \frac{w^*(s)g^*(s)}{1 - w^*(s)g^*(s)}. \tag{8.7}$$

Cum s-a arătat în paragraful 3.3.1, $M^*(s)$ s-a obţinut că :

$$M^*(s) = \frac{w^*(s)g^*(s)}{s\left[1 - w^*(s)g^*(s)\right]}. \tag{8.8}$$

Se defineşte disponibilitatea *A(t)* ca fiind probabilitatea de funcţionare perfectă a componentei la timpul *t*. Dacă nu este necesară nici o reparaţie, atunci :

$$R(t) = A(t) = 1 - W(t).$$

Componenta poate fi funcţională la momentul *t* pe motivul a două cazuri mutual exclusive: fie componenta nu a căzut de la început (nici o reînnoire în *(0, t]*) cu probabilitatea *R(t)*, fie ultima reînnoire(reparare) a apărut în momentul *x*, $0 < x < t$ şi componenta a continuat să funcţioneze din acel moment. Probabilitatea asociată celui de-al doilea caz este:

$$\int_0^t R(t-x)m(x)dx.$$

Deci,

$$A(t) = R(t) + \int_0^t R(t-x)m(x)dx.$$

Luând transformatele Laplace, se obţine :

$$A^*(s) = R^*(s) + R^*(s)m^*(s)$$

$$A^*(s) = R^*(s)\left[1 + m^*(s)\right] \tag{8.9}$$

Substituind ecuaţia (8.7) în ecuaţia (8.9) rezultă că :

Scanned with OKEN Scanner

$$A^*(s) = R^*(s)\left[1 + \frac{w^*(s)g^*(s)}{1 - w^*(s)g^*(s)}\right]$$

sau

$$A^*(s) = \frac{R^*(s)}{1 - w^*(s)g^*(s)}.$$

Dar $R(t) = 1 - W(t)$ şi transformata Laplace a acesteia este:

$$R^*(s) = \frac{1}{s} - W^*(s)$$

sau

$$R^*(s) = \frac{1}{s} - \frac{w^*(s)}{s}$$

$$= \frac{1 - w^*(s)}{s}$$

Deci,

$$A^*(s) = \frac{1 - w^*(s)}{s\left[1 - w^*(s)g^*(s)\right]}.$$

Disponibilitatea stării stabile, A, este:

$$A = \lim_{t\to\infty} A(t) = \lim_{s\to 0} sA^*(s).$$

Când s este mic, se poate aproxima $e^{-st} \cong 1 - st$ sau:

$$w^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} w(t)dt$$

$$\cong \int_0^\infty w(t)dt - s\int_0^\infty tw(t)dt$$

$$\cong 1 - \frac{s}{\alpha},$$

unde $1/\alpha$ este *MTTF* (timpul mediu de cădere).
De asemenea,

$$g^*(s) = 1 - \frac{s}{\beta},$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $1/\beta$ este *MTTR* (timpul mediu de reparare):

$$A = \lim_{s\to 0} \frac{1-\left[1-\frac{s}{\alpha}\right]}{1-\left[1-\frac{s}{\alpha}\right]\left[1-\frac{s}{\beta}\right]} = \frac{\frac{1}{\alpha}}{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}}$$

$$A = \frac{MTTF}{MTTF + MTTR}$$

EXEMPLUL 8.3

Se consideră cazul distribuțiilor exponențiale a timpului de cădere și a celui de reparare. Derivă o expresie a densității de reînnoire, m(t). Care este disponibilitatea A(t) și disponibilitatea stării stabile A(∞)?

Rezolvare

Fie w(t) și g(t) distribuțiile timpului de cădere și a timpului de reparare:

$$w(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

$$g(t) = \mu e^{-\mu t}$$

Transformatele Laplace a acestor două funcții sunt:

$$w^*(s) = \frac{\lambda}{s+\lambda}$$

$$g^*(s) = \frac{\mu}{s+\mu}.$$

Folosind ecuația (8.7), densitatea de reînnoire se obține ca:

$$m^*(s) = \frac{w^*(s)g^*(s)}{1-w^*(s)g^*(s)} = \frac{\lambda\mu}{s[s+(\lambda+\mu)]}$$

sau

$$m^*(s) = \frac{\lambda\mu}{(\lambda+\mu)s} - \frac{\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2}\frac{\lambda+\mu}{s+\lambda+\mu}$$

Funcția de densitate a reînnoirii este:

$$m(t) = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} - \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}$$

$$\lim_{t\to\infty} m(t) = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}$$

Scanned with OKEN Scanner

sau

$$\lim_{t\to\infty} m(t) = \frac{1}{MTTF + MTTR}.$$

Disponibilitatea sistemului se obține din:

$$A^*(s) = \frac{1 - \dfrac{\lambda}{s+\lambda}}{s\left[1 - \dfrac{\lambda\mu}{(s+\lambda)(s+\mu)}\right]}$$

sau

$$A^*(s) = \frac{s+\mu}{s[s+(\lambda+\mu)]}.$$

Nu există transformare pentru această funcție în tabelele transformatei Laplace. Totuși, o fracție algebrică parțiala reduce expresia de mai sus la rezultate cunoscute:

$$A^*(s) = \frac{\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}}{s} + \frac{\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}}{s+(\lambda+\mu)}.$$

Inversa Laplace este:

$$A(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t} \qquad \text{și} \qquad A = \lim_{t\to\infty} A(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}.$$

EXEMPLUL 8.4

Un producător de servomotoare sincrone a proiectat un test de fiabilitate prin supunerea acestora la o încărcare continuă. După cădere, motorul este reparat imediat și refăcut la condițiile inițiale. Testul este atunci continuat și procedura se reia. Distribuțiile timpului de cădere și a timpului de reparare sunt exponențiale, cu ratele λ și μ cu estimări de la $5\text{x}10^{-5}$ căderi pe oră și respectiv de $3\text{x}10^{-2}$ reparări pe oră. Să se determine numărul așteptat de căderi ale motorului pe durata a trei ani de teste și disponibilitatea motorului la sfârșitul perioadei. Să se determine M(t) și A(t) pentru valori diferite ale lui λ și μ.

Rezolvare

Deoarece distribuțiile timpilor de cădere și reparare sunt exponențiale, urmând exemplul 8.3, rezultă:

$$m^*(s) = \frac{\lambda\mu}{(\lambda+\mu)s} - \frac{\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2} \cdot \frac{1}{(s+\lambda+\mu)}$$

Și

Scanned with OKEN Scanner

$$m(t) = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} - \frac{\lambda\mu}{(\lambda+\mu)} e^{-(\lambda+\mu)t}$$

Numărul de reînnoiri în (0,t] este:

$$M(t) = \frac{\lambda\mu}{(\lambda+\mu)} t - \frac{\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2} + \frac{\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2} e^{-(\lambda+\mu)t}$$

Înlocuind cu valorile pentru λ şi μ în expresiile de mai sus, se obţine:

$$M(t) = 4{,}991\times10^{-5} t - 0{,}001661 + 1{,}661\times10^{-3} e^{-3.005\times10^{-2} t}.$$

Numărul aşteptat de căderi în intervalul $3\text{x}10^4$ *ore este:*

$$M(3\times10^4) = 1{,}479 \text{ căderi.}$$

Disponibilitatea motorului este:

$$A(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}$$

şi disponibilitatea la sfârşitul celor doi ani de teste este:

$$A(3\times10^4) = \frac{3\times10^{-2}}{3005\times10^{-2}} + \frac{5\times10^{-5}}{3005\times10^{-2}} e^{-(3{,}005)\times3\times10^2} \qquad A(3\times10^4) = 0{,}999.$$

Graficele lui M(t) şi A(t) pentru diferite valori ale λ şi μ sunt date în figurile 8.3 şi respectiv 8.4./9/.

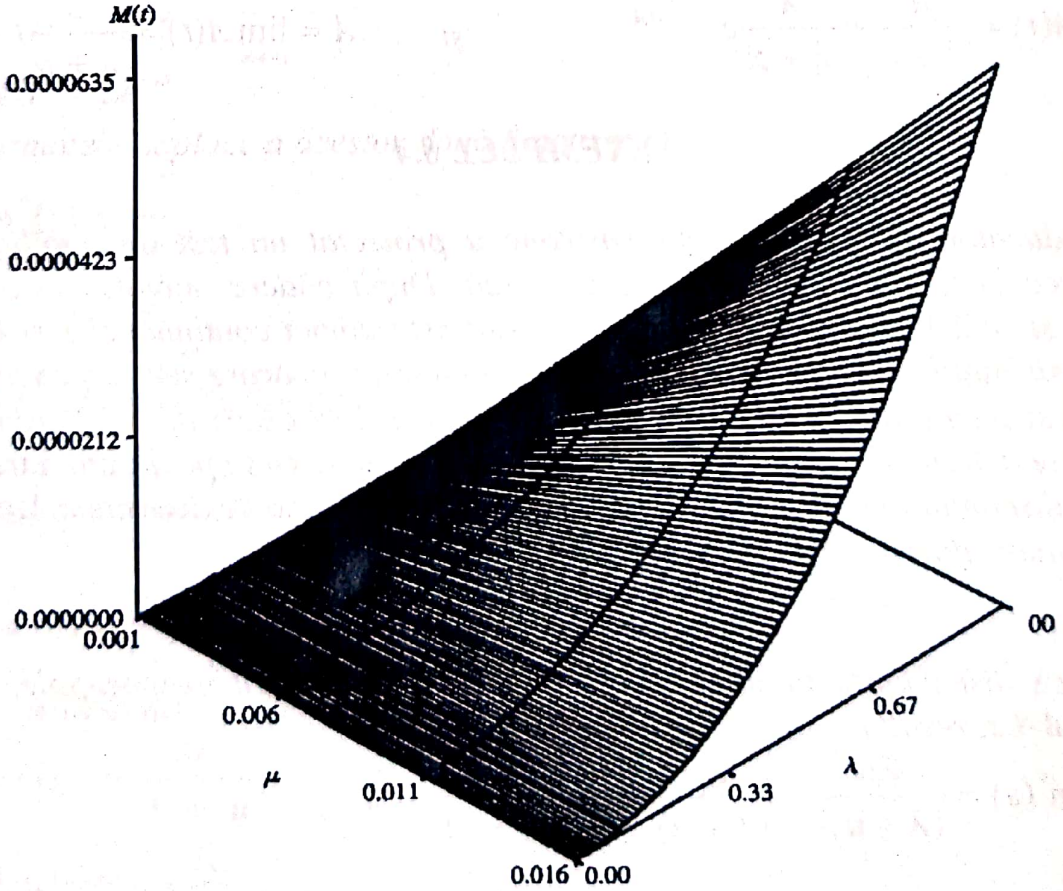


Figura 8.3. Variaţia lui M(t) funcţie de λ şi μ

Scanned with OKEN Scanner

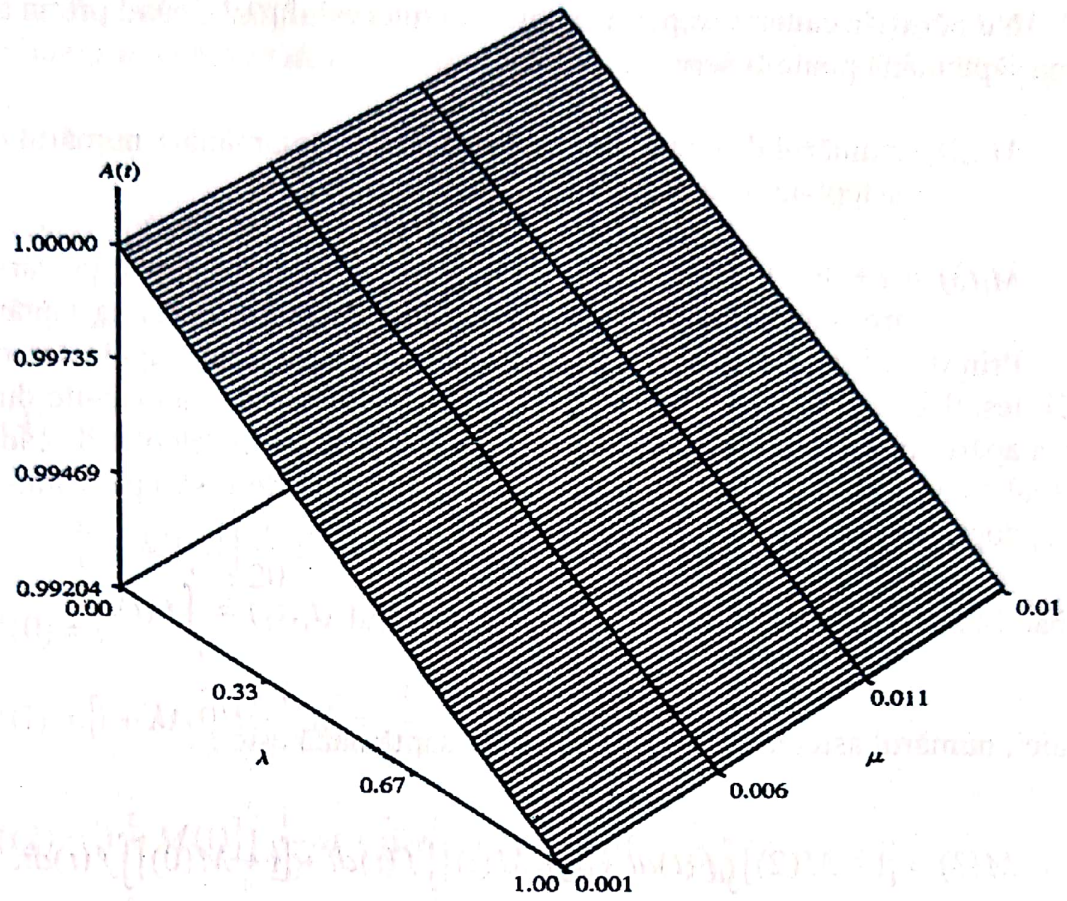


Figura 8.4. Variația lui A(t) funcție de λ și μ

8.1.2 TIMP DISCRET

Să considerăm situația în care scala de timp este discretă – sistemul (sau o componentă) este observat la intervale discrete de timp, cum ar fi o dată pe săptămână, o dată pe lună sau o dată pe an. Dacă o cădere se observă, sistemul este reparat și procesul reluat. Suntem interesați în determinarea numărului de căderi la sfârșitul intervalului discret de timp – să spunem a treia săptămână. Numărul așteptat de căderi la sfârșitul celei de-a treia săptămâni, *M(3)*, se obține ca:

M(3) = numărul așteptat de căderi ce apar în intervalul *(0,3)* când prima cădere apare în prima săptămână - *x* probabilitatea ca prima cădere să apară în intervalul *(0,1)* + numărul de căderi așteptate să apară în intervalul *(0,3)*, când prima cădere apare în a doua săptămână - *x* probabilitatea ca prima cădere să apară în intervalul *(1,2)* + numărul de căderi așteptate care apar în intervalul *(0,3)*, când prima cădere apare în a treia săptămână - *x* probabilitatea ca prima cădere să apară în intervalul *(2,3)*.

Scanned with OKEN Scanner

Numărul de căderi aşteptat care apar în intervalul *(0,3)*, când prima apare în prima săptămână poate fi scris ca:

$M_1(3)$ = numărul de căderi care apar în prima săptămână + numărul de căderi aşteptate în cele două săptămâni rămase;

sau

$M_1(3) = 1 + M(2)$, unde $M_1(3)$ este numărul de căderi aşteptat la sfârşitul celor trei săptămâni, arată că prima cădere a apărut în prima săptămână.

Prin definiție, numărul aşteptat de căderi în cele două săptămâni rămase este $M(2)$, testul începând cu o nouă componentă la înlocuirea celei căzute după căderea care a apărut în prima săptămână. Pentru a calcula numărul aşteptat de căderi în orice interval trebuie să calculăm probabilitatea ca prima cădere să apară într-un interval (t_1,t_2), după cum urmează.

Probabilitatea ca prima cădere să apară în intervalul $(t_1,t_2) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$.

De aici, numărul aşteptat de căderi în a treia săptămână este :

$$M(3) = [1 + M(2)]\int_0^1 f(t)dt + [1 + M(1)]\int_1^2 f(t)dt + [1 + M(0)]\int_2^3 f(t)dt.$$

Deoarece $M(0) = 0$, atunci ecuația de mai sus poate fi re-scrisă ca:

$$M(3) = \sum_{i=0}^{2}[1 + M(2-i)]\int_i^{i+1} f(t)dt.$$

În general, numărul de căderi după perioada de timp T se obține din:

$$M(T) = \sum_{i=0}^{T-1}[1 + M(T-i-1)]\int_i^{i+1} f(t)dt \qquad T \geq 1, \tag{8.10}$$

cu $M(0) = 0$.

EXEMPLUL 8.5

Producătorul de becuri electrice de 5V estimează numărul de căderi pe o perioadă de 20 de săptămâni prin supunerea unui bec la 10V. După cădere, becul este înlocuit de unul nou şi procesul se reia. Timpul de cădere pentru becuri se presupune că

Scanned with OKEN Scanner

urmăreşte o distribuţie uniformă între $0 \le t \le 20$ săptămâni cu $f(t) = 1/20$. Să se determine numărul aşteptat de căderi din a patra săptămână.

Rezolvare

Folosind ecuaţia (8.10) se obţine M(4) după cum urmează:

$$M(4) = \sum_{i=0}^{3}[1 + M(3-i)]\int_{i}^{i+1} f(t)dt$$

$$M(4) = [1 + M(3)]\int_{0}^{1}\frac{1}{20}dt + [1 + M(2)]\int_{1}^{2}\frac{1}{20}dt +$$

$$[1 + M(1)]\int_{2}^{3}\frac{1}{20}dt + [1 + M(0)]\int_{3}^{4}\frac{1}{20}dt$$

$$M(0) = 0$$

$$M(1) = [1 + M(0)]\int_{0}^{1}\frac{1}{20}dt = \frac{1}{20}$$

$$M(2) = [1 + M(1)]\int_{0}^{1}\frac{1}{20}dt + [1 + M(0)]\int_{1}^{2}\frac{1}{20}dt = \frac{41}{400}$$

$$M(3) = [1 + M(2)]\int_{0}^{1}\frac{1}{20}dt + [1 + M(1)]\int_{1}^{2}\frac{1}{20}dt +$$

$$[1 + M(0)]\int_{2}^{3}\frac{1}{20}dt = \frac{1.261}{8.000}$$

$M(4) = 0{,}2155$ *căderi.*

8.2 ESTIMAREA NON-PARAMETRICĂ A FUNCȚIEI *M(T)*

Când este dificil a determina transformata Laplace sau inversa sa pentru funcţii complexe de densitate a probabilităţii sau când distribuţia timpului de cădere este necunoscută dar valoarea medie şi deviaţia standard sunt cunoscute, putem estima numărul aşteptat de căderi (sau reînnoiri) în intervalul *(0, t]* când orizontul de timp este continuu sau când intervalul de timp este discret.

8.2.1 TIMP CONTINUU

Când orizontul de timp este continuu, se poate folosi o expresie generală pentru determinarea numărului de căderi în momentul *t*.

Scanned with OKEN Scanner

Se consideră forma pentru $M(t)$ când $t \to \infty$. Se examinează comportamentul lui $M^*(s)$ pentru un s mic. Transformata Laplace a *f.d.p.* -lui timpului de cădere, $f(t)$, este $f^*(s)$. Din proprietățile transformatei Laplace, media (μ) şi deviația standard (σ) a timpului de cădere pot fi determinate prin utilizarea următoarelor ecuații:

$$\left.\frac{df^*(s)}{ds}\right|_{s=0} = -\mu$$

$$\left.\frac{d^2 f^*(s)}{ds^2}\right|_{s=0} = \sigma^2 + \mu^2, f^*(0) = 1$$

Din ecuațiile de mai sus se poate exprima $f^*{}^*(s)$ ca o serie Taylor extinsă în jurul punctului $s = 0$

$$f^*(s) = 1 - s\mu + \frac{1}{2}s^2(\mu^2 + \sigma^2) + O(s^2) \tag{8.11}$$

unde $O(s^2)$este notația unei funcții de s ce tinde la zero când $s \to 0$ mai rapid decât s^2.

Înlocuind ecuația (8.11) în ecuația (8.8), se obține :

$$M^*(s) = \frac{1 - s\mu + \frac{1}{2}s^2(\mu^2 + \sigma^2) + O(s^2)}{s^2\mu - \frac{1}{2}s^3(\mu^2 + \sigma^2) + O(s^3)}.$$

Ecuația de mai sus poate fi simplificată folosind formula de expansiune a fracției parțiale dată mai jos:

$$g(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{\prod_{i=1}^{n}(s + r_i)} = \frac{A_1}{s + r_1} + \frac{A_2}{s + r_2} + \ldots + \frac{A_n}{s + r_n},$$

unde

$$A_i = \left[\frac{N(s)}{D(s)} \cdot (s + r_i)\right]_{s=-r_i}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuația de înainte este adevărată când rădăcinile expresiei lui $D(s)$ sunt toate reale și diferite. Evident, soluția trebuie să fie modificată când avem rădăcini care se repetă sau unele sunt imaginare.

Numitorul ecuației lui $M^*(s)$ are două rădăcini identice $r_1 = r_2 = 0$ și a treia este reală, r_3. De aici, se poate scrie $M^*(s)$ ca :

$$M^*(s) = \frac{A_1}{s^2 + 0} + \frac{A_2}{s^2 + 0} + \frac{A_3}{s + r_3}.$$

Coeficienții A_1, A_2, și A_3 pot fi obținuți după cum urmează :

$$A_1 = \left[\frac{(1 - s\mu + \frac{1}{2}s^2(\mu^2 + \sigma^2)) + O(s^2)}{s^2\mu - \frac{1}{2}s^3(\mu^2 + \sigma^2) + O(s^2)} \cdot s^2 \right]_{s=0} = \frac{1}{\mu}.$$

Știind că primii doi termeni s_1 și s_2 se repetă, A_2 se obține astfel :

$$A_2 = \frac{d}{ds}\left[\frac{(1 - s\mu + \frac{1}{2}s^2(\mu^2 + \sigma^2)) + O(s^2)}{s^2\mu + \frac{1}{2}s^3(\mu^2 + \sigma^2) + O(s^3)} \cdot s^2 \right]_{s=0} = \frac{-\mu^2 + \frac{1}{2}(\mu^2 + \sigma^2)}{\mu^2}$$

sau

$$A_2 = \frac{(\sigma^2 + \mu^2)}{2\mu^2},$$

și ultimul termen este o funcție de $O(1/s)$. Rezultă că:

$$M^*(s) = \frac{1}{s^2\mu} + \frac{1}{s}\frac{\sigma^2 + \mu^2}{2\mu^2} + O\left(\frac{1}{s}\right). \qquad (8.12)$$

Inversa ecuației (8.12), când $t \to \infty$, este :

$$M(t) = \frac{1}{\mu} + \frac{\sigma^2 + \mu^2}{2\mu^2} + O(1) \qquad (8.13)$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuația de mai sus rămâne adevărată atâta timp cât σ^2 este finit. Trebuie de reținut faptul că:

- dacă $\sigma = \mu$, atunci $M(t) = t/\mu + O(1)$. Pentru timpi de cădere cu distribuție exponențială : $M(t) = t/\mu$ sau λt.
- dacă $\sigma < \mu$, atunci termenul $(\sigma^2 - \mu^2)/2\mu^2$ din ecuația (8.13) devine negativ și dacă $\sigma << \mu$, atunci:

$$M(t) \approx \frac{t - \frac{1}{2}\mu}{\mu} + O(1). \qquad (8.14)$$

- Dacă, $\sigma > \mu$, termenul secund din ecuația (8.13) devine pozitiv. Aceasta implică faptul că atunci când coeficientul de variație σ^2/μ^2 este mai mare decât 1, este de așteptat a avea o probabilitate apropiată de zero a timpului de cădere.

Următoarele două exemple ilustrează folosirea ecuației generale pentru determinarea numărului așteptat de căderi (reînnoiri) când parametrii distribuției timpului de cădere sunt cunoscuți și când este dificil de obținut inversa transformatei Laplace.

EXEMPLUL 8.6

Se consideră căderea unei componente urmărind o distribuție cu $\mu = 6$ și $\sigma = 2$. Când componenta cade este imediat reparată și repusă în funcțiune. Mai mult, înlocuirea preventivă se face la fiecare 2.000 de săptămâni. Câte căderi au apărut înainte de înlocuirea preventivă?

Rezolvare

Folosind ecuația (8.13), se obține numărul de căderi :

$$M(t) = \frac{t}{\mu} + \frac{\sigma^2 - \mu^2}{2\mu^2}$$

$$M(2.000) = \frac{2.000}{6} + \frac{4 - 36}{2 \times 36} = 332{,}88 \text{ căderi.}$$

Scanned with OKEN Scanner

EXEMPLUL 8.7

Se presupune că distribuţia timpului de cădere a unui sistem complex cu un număr mare de unităţi, fiecare unitate având o distribuţie exponenţială a timpului de cădere, este una de tip Gamma. Parametrii distribuţiei sunt: $n = 60$ şi $\lambda = 0{,}002$. Să se determine numărul aşteptat de căderi după 10^6 ore de operare.

Rezolvare

Distribuţia Gamma are f(t) -ul de forma:

$$f(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{n-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(n)}$$

Transformata Laplace a numărului aşteptat de căderi este:

$$M^*(s) = \frac{1}{s\left[\left(1+\frac{s}{\lambda}\right)^n - 1\right]}$$

Inversa transformatei Laplace a lui $M^*(s)$ este complexă şi dificil de obţinut. De aceea, se va utiliza o expresie generală pentru numărul aşteptat de căderi după cum urmează.

Media este n/λ si variaţia este n/λ^2, deci, folosind ecuaţia (8.13) se obţine:

$$M(10^6) = \frac{10^6}{n/\lambda} + \frac{(n/\lambda^2) - (n/\lambda)^2}{2(n/\lambda)^2} = \frac{100}{3} - \frac{885}{1.800} = 32{,}82 \quad \textit{căderi.}$$

Sisteme cu două stagii/etape de defectare. Se consideră un sistem ale cărui componente cad dacă toate intră în cele două stagii ale mecanismelor de cădere. Primul mecanism de defectare se datorează unui voltaj excesiv şi al doilea unei temperaturi excesive. Se presupune că mecanismul de cădere intră în primul stagiu cu probabilitatea θ şi *f.d.p.* -ul timpului de cădere este $\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}$. El intră în al doilea stagiu cu probabilitatea *(1-θ)* şi *f.d.p.* -ul timpului de cădere propriu este $\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}$. Căderea unei componente apare la sfârşitul celor două stagii. De aceea, *f.d.p.* -ul timpului de cădere este:

$$f(t) = \theta\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + (1-\theta)\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}.$$

Transformata Laplace a lui *f(t)* este:

Scanned with OKEN Scanner

$$f^*(s) = \frac{\theta\lambda_1}{\lambda_1 + s} + \frac{(1-\theta)\lambda_2}{\lambda_2 + s}$$

$$f^*(s) = \frac{\lambda_1\lambda_2 + \theta\lambda_1 s + (1+\theta)\lambda_2 s}{(\lambda_1 + s)(\lambda_2 + s)}.$$

dar

$$M^*(s) = \frac{f^*(s)}{s\left[1 - f^*(s)\right]}.$$

Înlocuind pe $f^*(s)$ în ecuația de mai sus, se obține :

$$M^*(s) = \frac{s(\theta\lambda_1 + (1-\theta)\lambda_2) + \lambda_1\lambda_2}{s^2(s + (1-\theta)\lambda_1 + \theta\lambda_2} \qquad (8.15)$$

Ecuația (8.15) are doi poli, $r_1 = 0$ şi $r_2 = 0$ şi rădăcina $r_3 = -\{(1 - \theta)\lambda_1 + \theta\lambda_2\}$. Se poate scrie ecuația (8.15) astfel:

$$M^*(s) = \frac{A_1}{s^2} + \frac{A_2}{s} + \frac{A_3}{s - r_3},$$

unde A_1, A_2 şi A_3 se obțin după cum urmează:

$$A_1 = \left[\frac{s(\theta\lambda_1 + (1-\theta)\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2}{s^2(s + (1-\theta)\lambda_1 + \theta\lambda_2} \cdot s^2\right]_{s=0} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{(1-\theta)\lambda_1 + \theta\lambda_2}.$$

Deoarece $f^*(s = 0) = -\mu$, atunci

$$\frac{\lambda_1\lambda_2}{(1-\theta)\lambda_1 + \theta\lambda_2} = A_1 = \frac{1}{\mu}.$$

Similar, A_2 se obține ca :

$$A_2 = \frac{\sigma^2 - \mu^2}{\mu^2}$$

În final, A_3 se obține astfel :

Scanned with OKEN Scanner

$$A_3 = \left[\frac{s(\theta\lambda_1 + (1-\theta)\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2}{s^2(s+(1-\theta)\lambda_1 + \theta\lambda_2)} \cdot (s+(1-\theta)\lambda_1 + \theta\lambda_2)\right]_{s=-[(1-\theta)\lambda_1+\theta\lambda_2]}$$

$$A_3 = \frac{-\theta(\lambda_1-\lambda_2)^2 + \theta^2(\lambda_1-\lambda_2)^2}{[(1-\theta)\lambda_1 + \theta\lambda_2]^2}.$$

Folosind A_i, $i = 1, 2$ şi 3, în ecuaţia (8.15), $M^*(s)$ devine :

$$M^*(s) = \frac{1}{s^2\mu} + \frac{1}{s}\frac{\sigma^2-\mu^2}{2\mu^2} - \frac{\theta(1-\theta)(\lambda_1-\lambda_2^2)}{\{(1-\theta)\lambda_1+\theta\lambda_2\}^2(s-r_3)}.$$

Inversa ecuaţiei de mai sus este:

$$M(t) = \frac{t}{\mu} + \frac{\sigma^2-\mu^2}{2\mu^2} - \frac{\theta(1-\theta)(\lambda_1-\lambda_2)^2}{\{(1-\theta)\lambda_1+\theta\lambda_2\}^2}\exp[-\{(1-\theta)\lambda_1+\theta\lambda_2\}t] \qquad (8.16)$$

EXEMPLUL 8.8

Diodele laser folosite în sistemele de transmisie submarină din fibră optică sunt compuse din mai multe tipuri de elemente cum ar fi lentile, filtre dielectrice, fibre optice ş.a. Căderea sistemului este cauzată de căderea individuală a componentelor ca şi de stresul termic din joncţiuni. Se presupune ca filtrele dielectrice cad din cauza stresului termic cu o probabilitate de 0,1 şi că timpii de defectare urmăresc o distribuţie cu f.d.p. de forma $\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}$ *cu* $\lambda_1 = 0{,}00002$. *Mai poate de asemenea cădea datorită stresului de tensiune, cu o probabilitate de 0,9 şi o distribuţie a timpilor cu f.d.p. -ul* $\lambda_2 e^{\lambda_2 t}$, *cu* $\lambda_2 = 0{,}00005$. *Filtrul cade când unul din cele două evenimente apar. Să se determine numărul aşteptat de căderi în primii doi ani de folosire.*

Rezolvare

Parametrii sistemului sunt:

$\theta = 0{,}10$; $1-\theta = 0{,}90$

$\lambda_1 = 0{,}00002$; $\lambda_2 = 0{,}00005$

$$\mu = \frac{(1-\theta)\lambda_1 + \theta\lambda_2}{\lambda_1\lambda_2} = 2{,}3333\times10^4$$

$$\sigma^2 = \frac{(2-\theta)\theta\lambda_2^2 + (1-\theta^2)\lambda_1^2 - 2\theta(1-\theta)\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1^2\lambda_2^2} = 6{,}91\times10^8.$$

Scanned with OKEN Scanner

La momentul t=2 x 10⁴, înlocuind parametrii de mai sus în ecuaţia (8.16), se obţine:

$$M(2\times10^4) = \frac{2\times10^4}{2{,}3333\times10^4} + \frac{6{,}91-5{,}42}{10{,}85} - e^{-0{,}46}$$

$$M(2\times10^4) = 0{,}857 + 0{,}137 - 0{,}771 = 0{,}226$$

8.2.2 TIMP DISCRET

Rezultatul asimptotic al ecuaţiei (8.13) este foarte folositor atunci când sunt utilizate valori mari ale lui *t*. Sensul de „mari "depinde de distribuţia timpilor de cădere şi de acurateţea cerută, dar aproximarea nu este de obicei acceptată decât dacă $t \geq 2\mu$. Valorile mai mici ale lui *t* necesită adoptarea iniţială a unei *f.d.p., f(t),* pentru date. De multe ori, alegerea celei mai potrivite *f.d.p.* nu este întotdeauna uşoară, în special când unele date sunt cenzurate sau când dimensiunea lotului de încercat este mică. De aceea, este mult mai potrivit a considera o aproximare non-parametrică în determinarea lui *M(t)*. În continuare este prezentată dezvoltarea unei aproximări non-parametrice pentru *M(t)*, pentru intervale de timp discrete /9/.

Fie $X_1, X_2, \ldots\ldots X_n$ variabile aleatoare non-negative independente şi distribuite identic(*i.i.d.*), având *f.d.p.* -ul *f(x)* cu media μ şi variaţia σ^2. Dacă $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$, funcţia de reînnoire poate fi scrisă ca :

$$M(t) = \sum_{k=1}^{\infty} P(S_k \leq t). \tag{8.17}$$

Estimatorul pentru *M(t)* este:

$$\hat{M}_p(t) = \sum_{k=1}^{p} \hat{F}_n^{(k)}(t), \tag{8.18}$$

unde $\hat{F}_n^{(k)}(t)$ este funcţia de distribuţie a distribuţiei permutate a sumei a oricăror *k* variabile aleatoare X_i; ($p = 5$ sau 10). $\hat{F}_n^{(k)}(t)$ poate fi scrisă în termenii unei funcţii indicator *I* astfel:

$$\hat{F}_n^{(k)}(t) = (C_k^n)^{-1} \sum_i I(X_{i1} + \ldots + X_{ik} \leq t) \tag{8.19}$$

unde suma este pentru toate alegerile C_k^n la care *k* este din afara celor *n* valori ale X_i şi *I(A)* este 1 dacă evenimentul *A* apare şi *0* în caz contrar.

Scanned with OKEN Scanner

8.3 PROCESUL DE REÎNNOIRE ALTERNATIV

Se presupune că o maşină se strică şi este reparată conform schemei prezentate în figura 8.2. Stricarea (căderea/defectarea) maşinii şi repararea sunt două procese care nu apar simultan dar alternează în timp. Acest proces este numit un *proces de reînnoire alternativ*. Similar, se presupune că o componentă a unui sistem poate fi înlocuită după cădere de o componentă de tip *A* sau de o componentă de tip *B*. Dacă înlocuirea se face astfel încât atunci când componenta de tip *A* cade ea este înlocuită de o componentă de tip *B* şi viceversa, atunci vom avea un proces de reînnoire alternativ. Trebuie să fie clar că procesul de reînnoire alternativ nu este limitat la cele două tipuri de înlocuiri. De fapt, exemplul de mai înainte poate fi generalizat la *k* tipuri de componente urmărind un ciclu ordonat strict, sau poate fi generalizat având o matrice a probabilității de tranziție cu elemente p_{ij} care specifică probabilitatea că, componenta de tip *i* este înlocuită după cădere de componenta de tip *j*. Un astfel de sistem este numit proces semi-Markov.

8.3.1 NUMĂRUL AŞTEPTAT DE CĂDERI ÎN PROCESUL DE REÎNNOIRE ALTERNATIV

Se consideră un proces alternativ de reînnoire conform fig. 8.2. În loc de T_i şi D_i care reprezintă timpul de funcționare şi timpul de oprire al maşinii, se consideră cazul când componenta de tip *A* este înlocuită de componenta de tip *B* după cădere şi viceversa. Fie $X_i = X_{Ai} + X_{Bi}$, $i = 1,2,3,...$ variabile aleatoare care reprezintă procesul de reînnoire, cu X_{Ai} şi X_{Bi} ca secvențe de timpi în care maşina este bună, când componenta de tip *A*, respectiv cea de tip *B* sunt utilizate. De aici, dacă componenta de tip *A* a fost folosită la timpul $t = 0$, prima cădere apare în momentul X_{A1}, a doua la timpul $X_{A1} + X_{B1}$ şi aşa mai departe. De asemenea, prima cădere când componenta *B* este folosită apare în momentul $X_{A1} + X_{B1}$, a doua în momentul $X_{A1} + X_{B1} + X_{A2} + X_{B2}$, şi tot aşa. Deci, se pot aplica rezultatele din paragraful 8.1.1., luând distribuția timpului de cădere ca o convoluție a lui $f_A(x)$ şi $f_B(x)$, cu transformata Laplace $f_A^*(x) f_B^*(x)$. Numărul aşteptat de căderi a componentei *B* în intervalul $(0, t]$, $M_B(t)$, este obținută ca rezultat al inversei Laplace :

$$M_B^*(s) = \frac{f_A^*(s) f_B^*(s)}{s\left[1 - f_A^*(s) f_B^*(s)\right]}. \tag{8.20}$$

Numărul aşteptat de căderi a componentei *A* se obține prin modificarea procesului de reînnoire astfel încât *f.d.p.* -ul primului timp de cădere este $f_A(x)$ şi *f.d.p.* -*ul* timpilor de cădere sub-secvențiali este convoluția lui $f_A(x)$ şi $f_B(x)$:

Scanned with OKEN Scanner

$$M_A^*(s) = \frac{f_A^*(s)}{s\left[1 - f_A^*(s) f_B^*(s)\right]}. \tag{8.21}$$

Densitățile de reînnoire corespunzătoare lui $M_A^*(s)$ şi $M_B^*(s)$ sunt :

$$m_j^*(s) = sM_j^*(s), \quad j = A, B. \tag{8.22}$$

8.3.2 PROBABILITATEA COMPONENTEI DE TIP j DE A FI ÎN UZ LA MOMENTUL t

Unul dintre cele mai importante criterii de performanță ale componentei este probabilitatea ca ea să fie în uz la un moment dat. De exemplu, suntem interesați în a determina probabilitatea $P_A(t)$ ca, componenta A să fie în uz la momentul t (când maşina este sub observare). Această probabilitate se obține ca sumă de probabilități a două evenimente mutual exclusive: în primul, componenta inițială de tip A are un timp de cădere la un moment mai mare decât t şi al doilea, componenta B cade în intervalul $(u, u + \delta u)$, pentru orice timp $u < t$, şi este înlocuită de componenta A care nu cade în intervalul $t - u$. De aceea :

$$P_A(t) = R_A(t) + \int_0^t m_g(u) R_A(t-u)\,du, \tag{8.23}$$

unde $R_A(t)$ este fiabilitatea componentei A la momentul t. Aplicând transformata Laplace ecuației (8.23), se obține :

$$P_A^*(s) = \left[1 - f_A^*(s)\right]\left[1 + m_g^*(s)\right]/s. \tag{8.24}$$

Înlocuind ecuația (8.20) în ecuația de mai sus, rezultă :

$$P_A^*(s) = \frac{1 - f_A^*(s)}{s\left[1 - f_A^*(s) f_B^*(s)\right]}. \tag{8.25}$$

Ecuația (8.25) implică faptul că :

$$P_A^*(s) = M_B^*(s) - M_A^*(s) + 1/s.$$

Deci,

$$P_A(t) = M_B(t) - M_A(t) + 1. \tag{8.26}$$

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

EXEMPLUL 8.8

Aparatele utilizate în procesele de micro-turnare se defectează în mod uzual datorită înfundării duzelor de gaze care controlează mărimea jetului necesar. Din acest motiv, producătorii acestor tipuri de instalații prevăd două astfel de duze, A şi B, care sunt schimbate alternativ. Duza A este confecționată dintr-un material rezistent la o temperatură mei mare decât cel din care este făcută duza B. Timpii de defectare a duzelor urmăresc o distribuție exponențială cu parametrii : $1x10^{-6}$, respectiv $0,5x10^{-6}$. Care este probabilitatea ca duza A să fie în uz la timpul $t = 2x10^4$ ore ?

Rezolvare

Funcțiile densităților de probabilitate pentru cele două duze sunt :

$$f_A(t) = \lambda_A e^{-\lambda_A t} \quad \text{şi} \quad f_B(t) = \lambda_B e^{-\lambda_B t}.$$

Utilizând ecuațiile (8.20) şi (8.21) se obțin numerele aşteptate de căderi :

$$M_B(t) = \frac{\lambda_A \lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B} t + \left(-\frac{\lambda_A \lambda_B}{(\lambda_A + \lambda_B)^2} \right) + \frac{\lambda_A \lambda_B}{(\lambda_A + \lambda_B)^2} e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t}.$$

$$M_A(t) = \frac{\lambda_A \lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B} t + \frac{\lambda_A^2}{(\lambda_A + \lambda_B)^2} - \frac{\lambda_A^2}{(\lambda_A + \lambda_B)^2} e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t}.$$

Înlocuind aceste expresii în ecuația (8.26), se obține :

$$P_A(t) = M_B(t) - M_A(t) + 1.$$

$$P_A(t) = \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B} + \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t}.$$

Astfel, probabilitatea ca duza A să fie în uz la timpul $t = 2x10^4$ este :

$$P_A(2 \times 10^4) = \frac{0,5}{1,5} + \frac{1}{1,5} e^{-0.30} = 0,827.$$

8.4 APROXIMĂRI ALE LUI *M(t)*

Estimarea numărului aşteptat de reînnoiri *M(t)* utilizând ecuația (8.3) este dificilă deoarece *M(t)* apare în ambii membri ai ecuației. De aceea cercetătorii au investigat metode aproximative pentru integrala din ecuația (8.3) în vederea obținerii lui *M(t)* prin substituiri directe. În acest paragraf se vor prezenta pe scurt trei astfel de aproximări /9/.

I. În prima aproximare, relația de calcul este dată de :

$$M_b(t) = F(t) + \lambda \int_0^t [1 - F_e(t - x)] dx \qquad (8.27)$$

unde

$$F_e(t) = \lambda \int_0^t [1 - F(x)]dx$$

şi $\lambda = 1/\mu$, μ fiind valoarea aşteptată de timp între două reînnoiri.

II. A doua este $M_0(t)$ fiind dată de :

$$M_0(t) = \lambda t - F_e(t) + \int_0^t [1 - F_e(t-x)]dx \qquad (8.28)$$

III. A treia aproximare, presupune parcurgerea următoarei căi în vederea determinării lui $M_d(t)$. Funcţia de reînnoire $M(t)$ este:

$$M(t) = F(t) + \int_0^t M(t-x) f(x)dx$$

Densitatea de reînnoire $m(t)$ se obţine din:

$$m(t) = \frac{dM(t)}{dt}. \qquad (8.29)$$

O ecuaţie echivalentă densităţii de reînnoire poate fi scrisă ca :

$$m(t) = f(t) + \int_0^t m(t-x) f(x)dx. \qquad (8.30)$$

Se propune şi o expresie alternativă pentru funcţia $M(t)$, astfel:

$$M(t) = \lambda t - F_e(t) + \int_0^t [1 - F_e(t-x)]dM(x) \qquad (8.31)$$

Conform celor deja definite :

$$F_e(t) = \lambda \int_0^t [1 - F(x)]dx$$

şi $\lambda = 1/\mu$, unde μ este valoare aşteptată a timpului dintre reînnoiri .

Deoarece $M(t)$ satisface ecuaţia de reînnoire, satisface de asemenea ecuaţia:

Scanned with OKEN Scanner

$$F(x) = \int_0^x m(x-t)[1-F(x)]dx. \tag{8.32}$$

Combinând ecuațiile (8.29) și (8.32), se obține :

$$M(t) = \lambda t - F_e(t) + \int_0^t [1-F_e(t-x)]\left[\frac{F(x)\int_0^x m(x-t)f(t)dt}{\int_0^x m(x-t)[1-F(t)]dt} + f(x)\right]dx \tag{8.33}$$

Ecuația (8.33) se aproximează prin înlăturarea termenului $m(x - t)$, obținând următoarea estimare aproximativă a lui $M_d(t)$:

$$M_d(t) = \lambda t - F_e(t) + \int_0^t [1-F_e(t-x)]\left[f(x) + \frac{\lambda F^2(x)}{F_e(x)}\right]dx \tag{8.34}$$

O comparație între estimările lui $M_b(t)$ și $M_d(t)$ pentru o rată de hazard crescătoare a distribuției Gamma de forma $F(t) = 1-(1+2t)e^{-2t}$ cu *media* = 1 și *variația* =1/2 este prezentată în tabelul 8.1.

Tabelul 8.1. O comparație între $M_b(t)$ și $M_d(t)$ pentru distribuția Gamma

t	$M_b(t)$	$M_d(t)$	$M(t)$, exact
0,1	0,0176	0,0176	0,0176
0,2	0,0626	0,0626	0,0623
0,3	0,1264	0,1263	0,1253
0,4	0,2031	0,2029	0,2005
0,5	0,2888	0,2882	0,2838
0,6	0,3807	0,2794	0,3727
0,7	0,4768	0,4746	0,4652
0,8	0,5758	0,5723	0,5602
0,9	0,6766	0,6717	0,6568
1,0	0,7787	0,7718	0,7546
1,5	1,2946	1,2745	1,2506
2,0	1,8074	1,7720	1,7501
2,5	2,3148	2,6624	2,2500

Scanned with OKEN Scanner

3,0	2,8185	2,7605	2,7500
3,5	3,3202	3,2562	3,2500
4,0	3,8210	3,7534	3,7500
5,0	4,8215	4,7509	4,7500
6,0	5,8215	5,7502	5,7500
7,0	6,8215	6,7500	6,7500
8,0	7,8215	7,7500	7,7500
9,0	8,8215	8,7500	8,7500
10,0	9,8215	9,7500	9,7500
11,0	10,8215	10,7500	10,7500
12,0	11,8215	11,7500	11,7500
13,0	12,8215	12,7500	12,7500
14,0	13,8215	13,7500	13,7500
15,0	14,8215	14,7500	14,7500

Înainte de prezentarea unor caracteristici importante ale numărului aşteptat de reînnoiri cum ar fi variația, intervalul de încredere pentru $M(t)$ şi viața reziduală, se vor prezenta succint celelalte tipuri de procese de reînnoire.

8.5 ALTE TIPURI DE PROCESE DE REÎNNOIRE

Până acum, s-a discutat doar cazul când timpii de reînnoire (cădere sau cădere şi reparare) sunt non-negativi identici şi independenți. Aceste tipuri de procese se numesc *procese de reînnoire ordinare(obişnuite)*. Există două procese de reînnoire uşor diferite: *procesul de reînnoire modificat* (sau *întârziat*) şi *procesul de reînnoire de echilibru*. În cazul celui modificat timpul până la prima cădere T_1 are *f.d.p.* -ul $f_1(t)$ şi timpii de defectare dintre două căderi succesive după prima au toți acelaşi *f.d.p.*, $f(x)$. Cu alte cuvinte, condițiile procesului de reînnoire modificat sunt aceleaşi cu cele ale procesului obişnuit, exceptând că timpul de la origine până la prima cădere are o distribuție diferită față de ceilalți timpi de cădere.

Procesul de reînnoire de echilibru este un caz special al celui modificat când timpul până la prima cădere are *f.d.p.* -ul $R(t)/\mu$, unde $R(t)$ este funcția de fiabilitate la momentul t şi μ este timpul mediu de defectare.

Se vor da exemple tipice ale acestor trei tipuri de procese de reînnoire. Procesul ordinar/obişnuit este exemplificat de înlocuirile de becuri electrice după cădere, a filtrul de aer şi a pedalei de frână de la automobil, etc. Procesul de reînnoire modificat apare când durata de viața părții sau componentei originale este semnificativ diferită față de cea a elementelor de înlocuire. De exemplu, când un cumpărător achiziționează un nou vehicul, uleiul şi filtrele de aer de obicei sunt înlocuite după 1000 km, în timp ce înlocuirea uzuală a uleiului are loc în funcționare aproximativ după intervale egale de 3000 km. Procesul de re-înnoire de echilibru

Scanned with OKEN Scanner

poate fi privit ca un proces ordinar în care sistemul sau componenta a funcționat un timp îndelungat înainte de a fi primul/prima observată.

Trebuie de reținut faptul că densitatea de reînnoire pentru procesul modificat este similară cu cea a procesului ordinar, dată de ecuația (8.5) :

$$m_m(t) = f_1(t) + \int_0^t m_m(t-x) f(x) dx \tag{8.35}$$

unde $m_m(t)$ este densitatea de reînnoire a procesului modificat şi $f_1(t)$ este *f.d.p.* -ul timpului până la prima cădere (sau reînnoire).
În final, numărul aşteptat de reînnoiri la procesul de echilibru este:

$$M_e(t) = \frac{t}{\mu}, \tag{8.36}$$

unde μ este timpul mediu de cădere(reînnoire).

8.6 VARIAȚIA NUMĂRULUI DE REÎNNOIRI

Cum se va arăta în capitolele 9 şi 10, costul garanției, extinderea politicii de garanție şi schema optimă de mentenanță a unei componente (înlocuite sau reparate) sunt dependente de numărul aşteptat de căderi (sau reînnoiri) pe timpul perioadei de garanție şi mărimea planului mentenanță. Mai mult, variația numărului de reînnoiri are un impact deosebit de semnificativ asupra alegerii politicii de garanție adecvate.

Într-adevăr, când două politici de garanție au acelaşi cost de garanție aşteptat pentru aceeaşi lungime, variația costului de garanție va fi factorul decisiv în preferarea unei politici alteia. De aceea, este importantă determinarea variației numărului de reînnoiri, *Var [N(t)]*, în intervalul *(0, t]*.

Din definiția variației, se obține :

$$Var[N(t)] = E[N^2(t)] - E[N(t)]^2. \tag{8.37}$$

Dar

$$E[N(t)] = M(t) = \sum_{r=1}^{\infty} rP[N(t) = r],$$

care este exprimată în ecuația (8.2) ca

Scanned with OKEN Scanner

$$E[N(t)] = M(t) = \sum_{r=1}^{\infty} F_r(t). \tag{8.38}$$

În mod similar,

$$E[N^2(t)] = \sum_{r=1}^{\infty} r^2 P[N(t) = r]$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} r^2 [F_r(t) - F_{r+1}(t)]$$

sau

$$E[N^2(t)] = \sum_{r=1}^{\infty} (2r-1) F_r(t). \tag{8.39}$$

Înlocuind ecuațiile (8.38) şi (8.39) în (8.37) rezultă că

$$Var[N(t)] = \sum_{r=1}^{\infty} (2r-1) F_r(t) - [M(t)]^2. \tag{8.40}$$

Este dificil de lucrat cu ecuația (8.40), motiv pentru care se va folosi o formă algebrică mai simplă a *Var[N(t)]* prin folosirea lui *ψ(t),* care este definit ca /9/:

$$\psi(t) = E[N(t)(N(t)+1)]. \tag{8.41}$$

Ecuația (8.41) reprezintă suma $E[N^2(t)] + E[N(t)]$. De aici, variația lui *N(t)* poate fi exprimată funcție de *ψ(t)* ca:

$$Var[N(t)] = \psi(t) - M(t) - M^2(t). \tag{8.42}$$

Ecuația (8.41) poate fi scrisă ca:

$$\psi(t) = \sum_{r=0}^{\infty} r(r+1) P[N(t) = r]. \tag{8.43}$$

dar

$$P[N(t) = r] = F_r(t) - F_{r+1}(t). \tag{8.44}$$

Înlocuind ecuația (8.44) în ecuația (8.43) rezultă că:

Scanned with OKEN Scanner

$$\psi(t)=\sum_{r=0}^{\infty} r(r+1)\left[F_r(t)-F_{r+1}(t)\right] \tag{8.45}$$

Luând transformata Laplace a ecuației (8.45), rezultă:

$$\psi^*(s)=\frac{1}{s}\sum_{r=0}^{\infty} r(r+1)\left[f_r^*(s)-f_{r+1}^*(s)\right]$$

sau

$$\psi^*(s)=\frac{1}{s}\left[0+2F_1^*(s)-2f_2^*(s)+6f_2^*(s)-6f_3^*(s)+12f_3^*(s)-12f_4^*(s)+\ldots\right]$$

$$\psi^*(s)=\frac{2}{s}\sum_{r=1}^{\infty} rf_r^*(s). \tag{8.46}$$

Pentru un proces de reînnoire ordinar $f_r^*(s)=\left[f^*(s)\right]^r$. Astfel,

$$\psi_0^*(s)=\frac{2f^*(s)}{s\left[1-f^*(s)\right]^2}. \tag{8.47}$$

Pentru un proces de reînnoire de echilibru, $F_r^*(s)=\left[f^*(s)\right]^{r-1}\left[1-f^*(s)\right]/s\mu$, sau

$$\psi_e^*(s)=\frac{2}{s^2\mu\left[1-f^*(s)\right]}. \tag{8.48}$$

Relația între ecuația (8.48) şi funcția de reînnoire a unui proces ordinar este:

$$\psi_e^*(s)=\frac{2}{s\mu}\left[M_0^*(s)+\frac{1}{s}\right] \tag{8.49}$$

sau

$$\psi_e(t)=\frac{2}{\mu}\int_0^t M_0(x)dx+\frac{2t}{\mu}. \tag{8.50}$$

Înlocuind ecuațiile (8.36) şi (8.50) în ecuația (8.42), se obține relația numărului de reînnoiri a unui proces de echilibru :

$$Var\left[N_e(t)\right]=\frac{2}{\mu}\int_0^t\left[M_0(x)-\frac{x}{\mu}+\frac{1}{2}\right]dx. \tag{8.51}$$

Scanned with OKEN Scanner

EXEMPLUL 8.9

Cele mai multe părți a mașinii sunt supuse unor încărcări ciclice sau fluctuante care induc un stres ce duc adesea la căderi din cauza oboselii. Oboseala poate fi caracterizată ca fiind un fenomen de defectare progresivă care lucrează prin inițierea și propagarea unor rupturi de la stadiul de micro-fisuri la dimensiune caracteristică deteriorării. De aceea timpul de cădere poate fi reprezentat printr-un proces cu două stadii/etape ce poate fi modelat cu o distribuție specială Erlangian cu două stadii, cu parametrul λ de căderi pe oră.

1. *Presupunând că avem de-a face cu un proces de reînnoire ordinar, să se traseze graficul lui $M_0(t)$ și al $Var[N_0(t)]$ pentru diferite valori ale lui λ și t.*
2. *Să se traseze aceleași grafice, pentru un proces de reînnoire de echilibru.*

Rezolvare

Funcția de densitate a probabilității la distribuția Erlangian specială este:

$$f(t)=\frac{1}{\lambda^2}e^{-t/\lambda}.$$

Transformata Laplace a lui f(t) este:

$$f^*(s)=\frac{1}{(1+s\lambda)^2}. \qquad (8.52)$$

1.Numărul așteptat de reînnoiri a unui proces de re-înnoire ordinar se obține prin înlocuirea ecuației (8.52) în ecuația (8.6). De aici rezultă,

$$M_0^*(s)=\frac{f^*(s)}{s[1-f^*(t)]}$$

$$M_0^*(s)=\frac{\dfrac{1}{(1+s\lambda)^2}}{s\left[1-\dfrac{1}{(1+s\lambda)^2}\right]}=\frac{1/\lambda^2}{s^2(s+2/\lambda)}. \qquad (8.53)$$

Pentru a obține inversa lui $M_0^*(s)$, se re-scrie ecuația (8.53) astfel:

$$M_0^*(s)=\frac{1}{2\lambda s^2}-\frac{1}{4s}+\frac{1}{4\left(s+\dfrac{2}{\lambda}\right)}. \qquad (8.54)$$

Inversa este:

$$M_0(t)=\frac{t}{2\lambda}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}e^{-2t/\lambda}. \qquad (8.55)$$

Pentru a obține variația numărului de reînnoiri a unui proces ordinar se folosește ecuația (8.42):

Scanned with OKEN Scanner

$$Var[N_0(t)] = \psi_0(t) - M_0(t) - M_0^2(t). \qquad (8.56)$$

Se estimează mai întâi $\psi_0(t)$ *prin obținerea inversei lui* $\psi_0^*(s)$ *:*

$$\psi_0^*(s) = \frac{2f^*(s)}{s[1-f^*(s)]^2}$$

sau

$$\psi_0^*(s) = \frac{2\left[\frac{1}{(1+s\lambda)^2}\right]}{s\left[1-\frac{1}{(1+s\lambda)^2}\right]} = \frac{2(1+s\lambda)^2}{\lambda s^3(2+s\lambda)^2} \qquad \text{şi}$$

$$\psi_0(t) = \frac{t^2}{4\lambda^2} + \frac{t}{2\lambda} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8}e^{\frac{-2t}{\lambda}} - \frac{t}{4\lambda}e^{\frac{-2t}{\lambda}}. \qquad (8.57)$$

Înlocuind ecuațiile (8.55) şi (8.57) în ecuația (8.56), se obține:

$$Var[N_0(t)] = \frac{t}{4\lambda} + \frac{1}{16} - \frac{t}{2\lambda}e^{\frac{-2t}{\lambda}} - \frac{1}{16}e^{\frac{-4t}{\lambda}}. \qquad (8.58)$$

Figurile 8.5 şi 8.6 prezintă efectul lui λ *şi t asupra lui* $M_0(t)$ *şi respectiv asupra* $Var[N_0(t)]$.

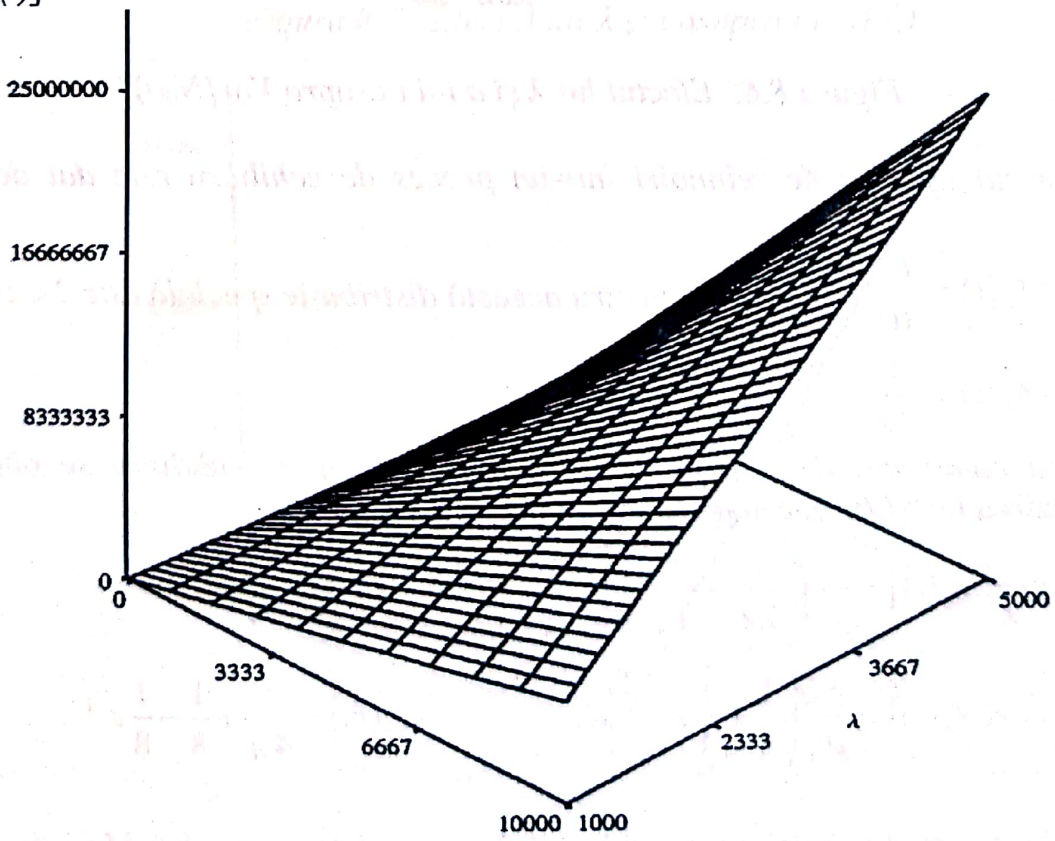


Figura 8.5. Variația lui $M_0(t)$ *funcție de* λ *şi t.*

Scanned with OKEN Scanner

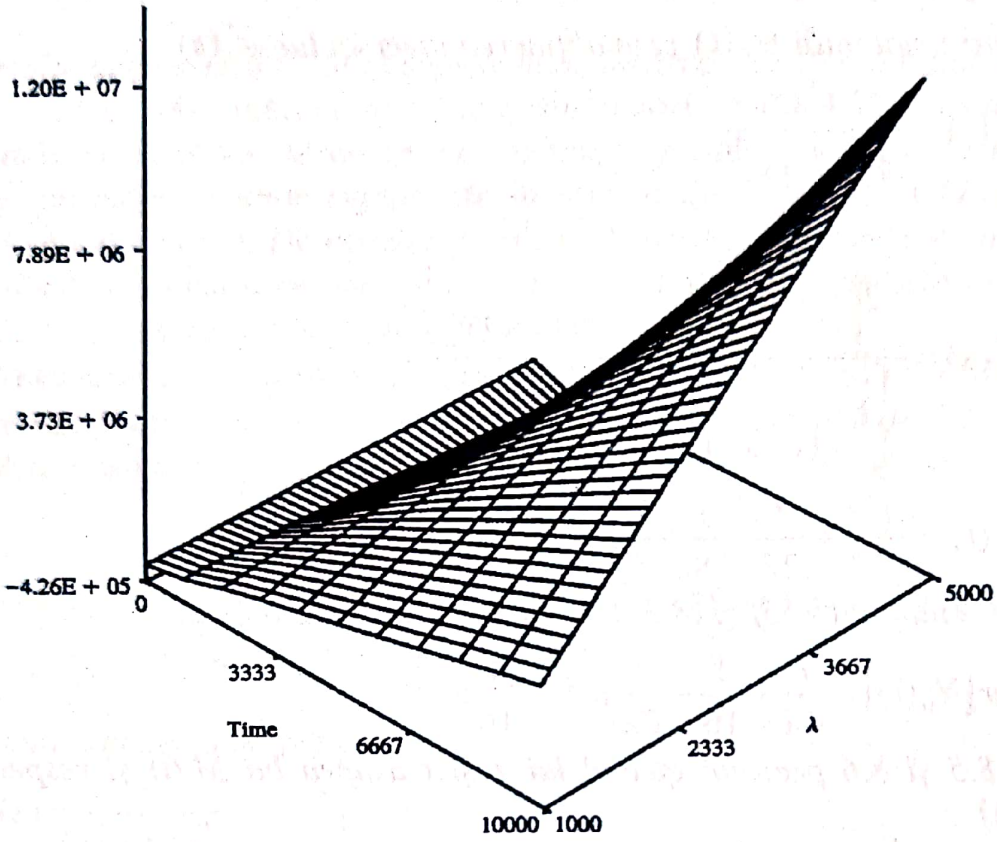


Figura 8.6. Efectul lui λ şi a lui t asupra Var[N₀(t)]

2. Numărul aşteptat de reînnoiri într-un proces de echilibru este dat de ecuaţia (8.36):

$$M_e(t)=\frac{t}{\mu},$$ *unde μ, pentru această distribuţie specială este 2λ, deci:*

$$M_e(t)=\frac{t}{2\lambda}. \qquad (8.59)$$

Variaţia numărului de reînnoiri în cazul procesului de echilibru se obţine prin substituirea lui $M_e(t)$ în ecuaţia (8.51) pentru a obţine:

$$Var[N_e(t)]=\frac{2}{\mu}\int_0^t\left[\frac{x}{2\lambda}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}e^{\frac{-2x}{\lambda}}-\frac{x}{2\lambda}+\frac{1}{2}\right]dx$$

$$Var[N_e(t)]=\frac{2}{\mu}\int_0^t\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}e^{\frac{-2x}{\lambda}}\right)dx \qquad Var[N_e(t)]=\frac{t}{4\mu}+\frac{1}{8}-\frac{1}{8}e^{\frac{-2t}{\lambda}}. \qquad (8.60)$$

Figurile 8.7 şi 8.8 prezintă efectul lui λ şi a lui t asupra lui $M_0(t)$ şi respectiv $Var[N_0(t)]$.

Scanned with OKEN Scanner

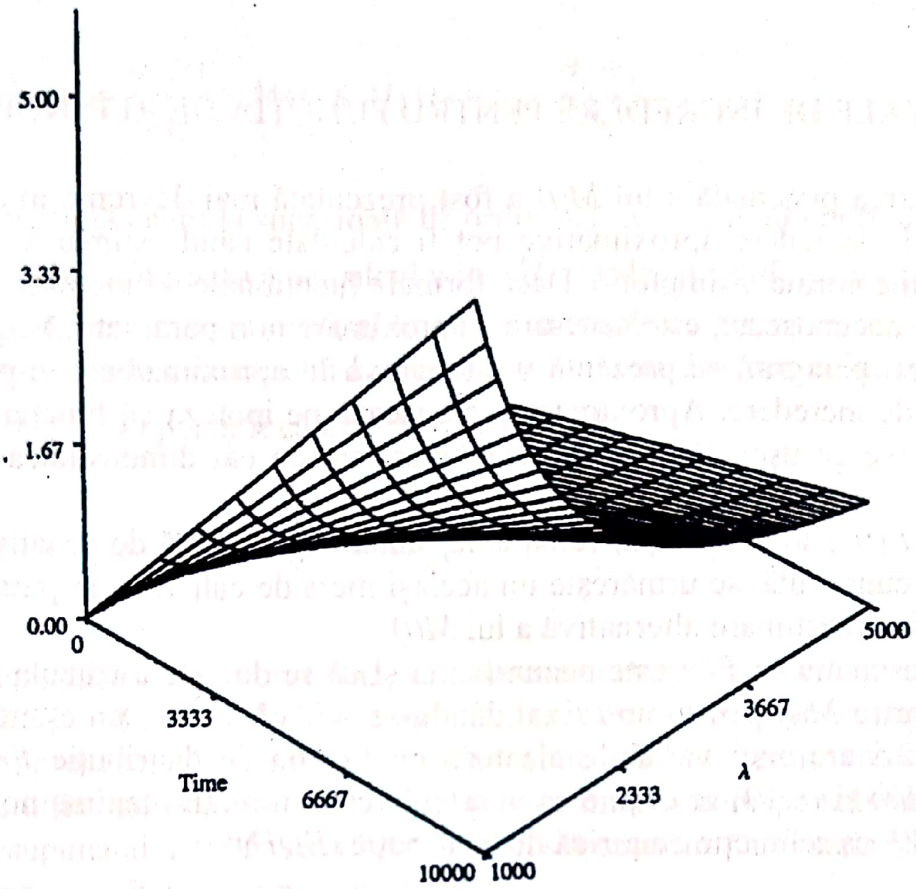


Figura 8.7. Efectul lui λ şi t asupra lui $M_e(t)$

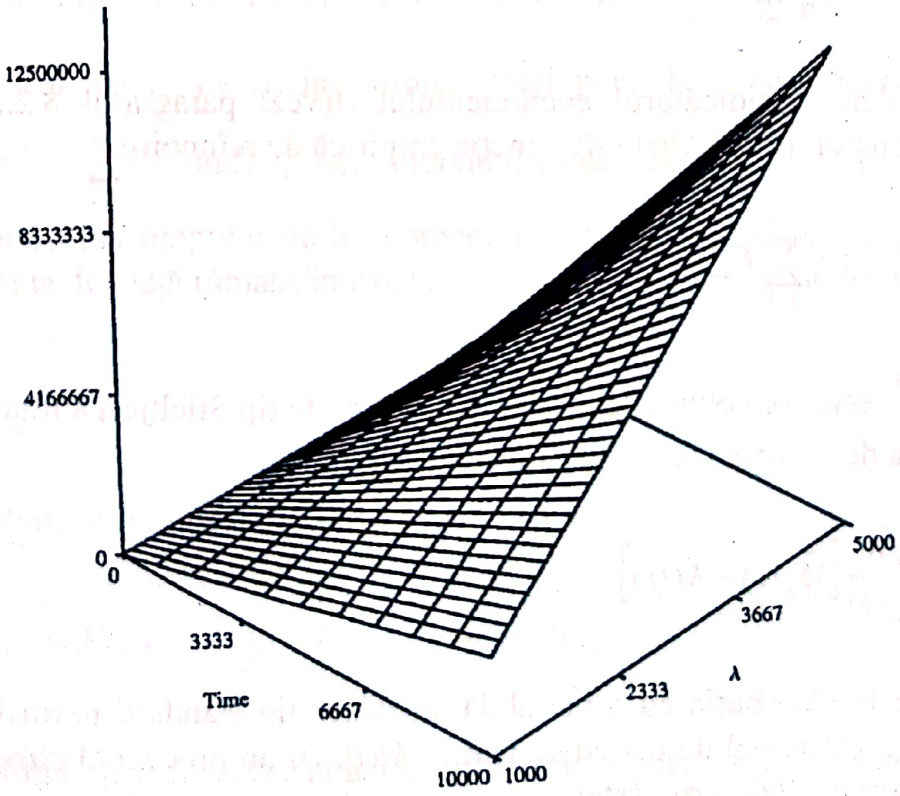


Figura 8.8. Efectul lui λ şi t asupra $Var[N_e(t)]$

Scanned with OKEN Scanner

8.7 INTERVALE DE ÎNCREDERE PENTRU FUNCŢIA DE REÎNNOIRE

Estimarea punctuală a lui *M(t)* a fost prezentată mai devreme în acest capitol. Intervalele de încredere aproximative pot fi calculate când estimările parametrului sunt distribuite normal asimptotic. Dacă formele funcţionale a funcţiilor de distribuţie de bază sunt necunoscute, este necesară o aproximare non-parametrică .

În acest paragraf, se prezentă o alternativă în aproximarea non-parametrică a intervalului de încredere. Aproximarea se bazează pe ipoteza că funcţia de reînnoire empirică converge uşor către un proces Gaussian, cu cât dimensiunea eşantionului creşte.

Când *F(t)* este cunoscută, funcţia de reînnoire este dată de ecuaţia (8.2). Când *F(t)* nu este cunoscută, se urmăreşte un acelaşi mers de calcul ca în paragraful 8.2.2. pentru a obţine o estimare alternativă a lui *M(t)*.

Se presupune că *F(t)* este necunoscută şi că se doreşte a calcula intervalul de încredere pentru *M(t)* pentru un *t* fixat dându-se *x1, x2,..., xn,* un eşantion aleatoriu de *n* observări ale unei variabile aleatorii cu funcţia de distribuţie *F(t)*. Utilizând ecuaţiile (8.18) şi (8.19) se obţine estimatorul verosimilităţii maxime non-parametric (*MLE*) al lui *F* ca o funcţie empirică de distribuţie (*EDF*)/9/:

$$\hat{F}_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I_{\{xi \le t\}} \tag{8.61}$$

unde I_A denotă indicatorul evenimentului *A*(vezi paragraful 8.2.2.). De aici, un estimator natural a lui *M(t)* este funcţia empirică de reînnoire :

$$\hat{M}_n(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{F}_n^{(k)}(t), \tag{8.62}$$

unde $\hat{F}_n^{(k)}$ este convoluţia de ordin *k* recursivă, de tip Stieltjes, a funcţiei $\hat{F}_n$.

S-a demonstrat că daca $n \to \infty$,

$$\frac{\sqrt{n}}{\hat{\sigma}_n(t)}\left[\hat{M}_n(t) - M(t)\right]$$

converge la distribuţia cu o variabilă aleatoare tip standard normală. Astfel, pentru $\alpha \in (0,1)$, intervalul de încredere pentru *M(t)*, cu un procent al cifrei de încredere/de aproximare de $100(1-\alpha)$, este:

Scanned with OKEN Scanner

$$\hat{M}_n(t) - z_{\alpha/2}\frac{\hat{\sigma}_n(t)}{\sqrt{n}} \le M(t) \le \hat{M}_n(t) + z_{\alpha/2}\frac{\hat{\sigma}_n(t)}{\sqrt{n}}, \tag{8.63}$$

unde $z_{\alpha/2}$ reprezintă cuantila superioară de ordin $\alpha/2$ a distribuției normale standard.

O procedură alternativă de calcul a lui $\hat{M}_n(t)$ decât cea folosind ecuația (8.62), necesită împărțirea intervalului $(0, t]$ în k sub-intervale de dimensiune egală – $0 = t_0 < t_1, \ldots < t_k = t$ – unde valoarea lui k depinde de t. Ținând seama de aceste observații, $\hat{M}_n(t_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ poate fi calculată recursiv astfel :

$$\hat{M}_n(t_i) = \hat{F}_n(t_i) + \sum_{j=1}^{i} \hat{M}_n(t_i - t_j)\left[\hat{F}_n(t_j) - \hat{F}_n(t_{j-1})\right]$$

Evident, dacă F este cunoscută, se utilizează ecuația (8.4) sau aproximările sale (ecuațiile (8.27), (8.28) şi (8.34)) pentru un proces ordinar sau ecuațiile (8.35) şi (8.36) pentru procesele de reînnoire modificat şi de echilibru, pentru a estima $M(t)$.

Apoi, utilizând ecuația (8.42) se obține estimarea corespunzătoare a variației. În final, presupunând $n = 25$, se substituie această estimare în ecuația (8.63) pentru a obține intervalul de încredere pentru $M(t)$.

8.8 DURATA DE VIAȚĂ RĂMASĂ LA MOMENTUL t

În paragraful 8.1.1. s-a definit timpul total până la a r-a cădere ca fiind $S_r = t_1 + t_2 + \ldots + t_r = \sum_{i=1}^{r} t_i$, unde t_i este intervalul dintre căderile $i-1$ şi i. În acest subcapitol se va estima timpului de la momentul t până la următoarea reînnoire – aceasta fiind durata de viață rămasă/în exces la momentul t. Fie $L(t)$ această durata de viață rămasă :

$$L(t) = S_{N(t)+1} - t. \tag{8.64}$$

Funcția de distribuție a lui $L(t)$ este dată pentru $x \ge 0$ de :

$$P(L(t) \le x) = F(t + x) - \int_0^t [1 - F(t + x - y)]dM(y). \tag{8.65}$$

În general este dificil de rezolvat ecuația (8.65) analitic. Cânt $t \to \infty$, atunci :

Scanned with OKEN Scanner

$$\lim_{t\to\infty} P(L(t) \le x) = \frac{\int_0^x [1 - F(y)]dy}{\mu}, \tag{8.66}$$

unde $\mu = E[X]$.

Se consideră un proces de reînnoire care "acționează" de o perioadă foarte mare de timp dar care observat începând din momentul $t = 0$. Fie T_1 mărimea ce reprezintă timpului primei reînnoiri după momentul $t = 0$. Deci T_1 este durata de viață rămasă a unității aflate în funcționare la tipul $t = 0$. Din ecuația (8.66), funcția de distribuție a lui T_1 este :

$$F_{T_1}(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F_T(y)]dy. \tag{8.67}$$

Când durata de viață a unității (sau componentei) care este în funcționare la timpul $t = 0$ este mai mare decât *0*, avem un proces de reînnoire modificat. Distribuția duratei de viață în exces $L(t)$ devine :

$$P(L(t) \le x) = F_{T_1}(t+x) - \int_0^t [1 - F_T(t+x-y)]dM_m(y), \tag{8.68}$$

unde $M_m(y)$ este funcția de reînnoire a procesului de reînnoire modificat.

Durata medie de viață rămasă dintr-un proces de reînnoire staționar este :

$$E[L(t)] = \int_0^\infty [1 - P(L(t)) \le x]dx, \tag{8.69}$$

și

$$\lim_{t\to\infty} E[L(t)] = \frac{E[X^2]}{2\mu},$$

unde X este timpul dintre reînnoiri.

EXEMPLUL 8.10

O facilitate în producerea de cabluri de comunicație este utilizarea unei mașini cu două inele de trefilare identice. Mașina iese din funcțiune numai când cele două inele

Scanned with OKEN Scanner

se defectează. Timpii de cădere urmează o distribuție exponențială cu parametrul λ = 0, 001 căderi pe oră. Să se determine media duratei de viață în exces a mașinii de trefilat.

Rezolvare

Știind că stoparea mașinii are loc numai atunci când ambele inele cad, fiabilitatea ei poate fi estimată astfel:

$$R(t) = 2e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t}.$$

Timpul mediu de cădere este :.

$$\mu = \int_0^\infty R(t)dt = \frac{3}{2\lambda}.$$

Utilizând ecuația (8.66), se obține :

$$P(L(t) \le x) = \frac{1}{\mu}\int_0^x R(t)dt$$

$$P(L(t) \le x) = \frac{2\lambda}{3}\left[\frac{-2}{\lambda}e^{-\lambda t} + \frac{2}{2\lambda}e^{-2\lambda t}\right]_0^x$$

sau

$$P(l(t) \le x) = \frac{2\lambda}{3}\left[\frac{-2}{\lambda}e^{-\lambda x} + \frac{1}{2\lambda}e^{-2\lambda x} + \frac{3}{2\lambda}\right].$$

Durata medie de viață în exces este :

$$E[L(t)] = \int_0^\infty [1 - P(L(t) \le x)]dx$$

$$E[L(t)] = \int_0^\infty \left(\frac{4}{3}e^{-\lambda x} - \frac{1}{3}e^{-2\lambda x}\right)dx$$

sau

$$E[L(t)] = \frac{7}{6\lambda} = 1.167 \text{ ore.}$$

8.9 PROCESE *POISSON*

Două procese punctuale importante sunt utilizate frecvent în modelarea sistemelor reparabile. Un *sistem reparabil* este un sistem care poate fi reparat când căderile apar, cum ar fi mașinile, avioanele și calculatoarele. Un *sistem non-reparabil* este un sistem care este deșeu și este înlocuit după cădere, cum ar fi un cip-urile electronice sau calculatoare ieftine.

Scanned with OKEN Scanner

8.9.1 PROCESUL *POISSON* OMOGEN

Înainte de a defini procesele Poisson omogene(*PPO*), se va introduce un proces de numărare $N(t)$, $t \geq 0$. El reprezintă numărul total de evenimente (cum ar fi căderile şi reparaţiile) care au apărut până la momentul t. Procesul de numărare $N(t)$ trebuie să satisfacă următoarele cerinţe:

1) $N(t) \geq 0$,
2) $N(t)$ este o valoare întreagă,
3) Dacă $t_1 < t_2$ atunci $N(t_1) \leq N(t_2)$,
4) Numărul de evenimente care apar în intervalul $[t_1, t_2]$, unde $t_1 < t_2$, este $N(t_2) - N(t_1)$.

Pentru un *PPO*, condiţia 4 se modifică astfel încât numărul de evenimente (căderi) în intervalul $[t_1, t_2]$ să aibă o distribuţie Poisson cu media $\lambda(t_1 - t_2)$ unde λ este rata de cădere şi introducând condiţii adiţionale: $N(0) = 0$ şi numărul de evenimente din intervalele ne-suprapuse sunt independente – altfel spus, procesele au creşteri independente. De aceea, pentru $t_2 > t_1 \geq 0$ probabilitatea de a avea n căderi în intervalul $[t_1, t_2]$ este :

$$P\{N(t_2) - N(t_1) = n\} = \frac{e^{-\lambda(t_2 - t_1)}\left[\lambda(t_2 - t_1)\right]^n}{n!}$$

pentru $n \geq 0$.

Conform condiţiei 4, procesul *Poisson* are un număr aşteptat de căderi (evenimente) :

$$E\left[N(t_2 - t_1)\right] = \lambda(t_2 - t_1).$$

Procesul *Poisson* este omogen când λ nu este dependentă de timp – numărul de evenimente dintr-un interval depinde doar de lungimea intervalului (procesul are creşteri staţionare). De aceea, funcţia de fiabilitate $R(t_1, t_2)$ pentru intervalul $[t_1, t_2]$, este :

$$R(t_1, t_2) = e^{-\lambda(t_2 - t_1)}.$$

8.9.2 PROCESUL *POISSON* NEOMOGEN

Procesul *Poisson* ne-omogen (*PPNO*) este similar *PPO* cu excepţia faptului că rata de cădere (rata de apariţie a unui eveniment) este dependentă de timp. Din această cauză procesul este ne-staţionar. Cu alte cuvinte, se modifică condiţia 4 după cum urmează:

Scanned with OKEN Scanner

4) Numărul de evenimente care apar în intervalul $[t_1, t_2]$, unde $t_1 < t_2$, are o distribuție Poisson cu media $\int_{t_1}^{t_2}\lambda(t)dt$.

Mai departe, probabilitatea de a avea n căderi în intervalul $[t_1, t_2]$ este:

$$P\{N(t_2)-N(t_1)=n\}=\frac{e^{-\int_{t_1}^{t_2}\lambda(t)dt}\left[\int_{t_1}^{t_2}\lambda(t)dt\right]^n}{n!},$$

şi numărul aşteptat de căderi în intervalul $[t_1, t_2]$ este :

$$E[N(t_2)-N(t_1)]=\int_{t_1}^{t_2}\lambda(t)dt.$$

Funcția de fiabilitate a *PPNO*, pentru intervalul $[t_1, t_2]$, este :

$$R(t_1,t_2)=e^{-\int_{t_1}^{t_2}\lambda(t)dt}$$

EXEMPLUL 8.11

Să se determine M(t) când:

1) $F(t)=1-e^{-t/\mu_1}$

2) f(t) este o funcție de densitate Gamma de ordin k :

$$f(t)=\frac{\lambda(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda t}$$

Rezolvare

1) Funcția de distribuție $F(t)=1-e^{-t/\mu_1}$ *are o funcție de densitate a probabilității*

$$f(t)=\frac{1}{\mu_1}e^{-t/\mu_1}$$

Fie $\lambda=\frac{1}{\mu_1}$, *dar* $m^*(s)=\frac{f^*(s)}{1-f^*(s)}$ *sau* $m^*(s)=\frac{\frac{\lambda}{s+\lambda}}{1-\frac{\lambda}{s+\lambda}}=\frac{\lambda}{s}.$

Scanned with OKEN Scanner

Inversa lui m(s) este*

$$m(t)=\lambda \quad \text{şi} \qquad M(t)=\int_0^t \lambda dt=\lambda t$$

sau $$M(t)=\frac{1}{\mu_1}.$$

Pentru PPO, numărul aşteptat de reînnoiri într-un interval de lungime t este pur şi simplu t împărţit la durata medie de viaţă.

2) Este cunoscut că f.d.p –ul distribuţiei Gamma de ordin k este convoluţia a k exponenţiale cu parametrul λ. Mai mult, probabilitatea a n reînnoiri în (0, t] pentru un proces de reînnoire definit de f(t) este egală cu probabilitatea fiecăruia din evenimentele nk, nk+1,... sau nk+k-1 să apară în (0, t] pentru un proces Poisson cu parametrul λ. De aceea,

$$P[N(t)=n]=\frac{(\lambda t)^{nk}}{(nk)!}e^{-\lambda t}+\frac{(\lambda t)^{nk+1}}{(nk+1)!}e^{-\lambda t}+\ldots+\frac{(\lambda t)^{nk+k-1}}{(nk+k-1)!}e^{-\lambda t}.$$

Fie m(t) densitatea de reînnoire pentru funcţia de densitate Gamma de ordin k. Pentru k = 1 (densitate exponenţială), $m(t)=\lambda$ după cum s-a arătat la pct. (1) a acestui exemplu. Deoarece m(t)dt este probabilitatea de reînnoire în intervalul [t, t+dt], se poate interpreta această probabilitate a densităţii Gamma de ordin k ca fiind:

$$m(t)dt=\sum_{j=1}^{\infty}\left[\frac{(\lambda t)^{kj-1}}{(kj-1)!}e^{-\lambda t}\right]\lambda dt. \qquad (8.70)$$

Partea dreaptă a ecuaţiei reprezintă probabilitatea ca kj-1 evenimente să apară în (0, t] într-un proces Poisson cu parametrul λ.

Atunci când k = 2

$$m(t)=\frac{\lambda}{2}-\frac{\lambda}{2}e^{-2\lambda t} \qquad \text{şi} \qquad M(t)=\frac{\lambda t}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}e^{-2\lambda t}.$$

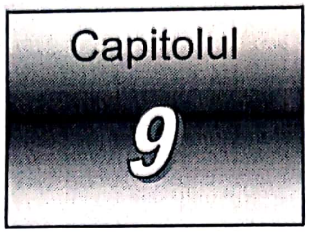
Numărul aşteptat de căderi în intervalul (0, t] pentru o componentă la cărui timp de cădere urmăreşte o distribuţie Erlang cu k stadii se obţine prin integrarea ecuaţiei (8.67), obţinându-se:

$$M(t)=\frac{\lambda t}{k}+\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k=1}\frac{\theta^j}{1-\theta^j}\left[1-e^{-\lambda t(1-\theta^j)}\right],$$

unde

$$\theta=e^{(2\pi i/k)} \qquad \text{şi} \qquad i=\sqrt{-1}.$$

Scanned with OKEN Scanner



MODELE DE GARANȚIE

"Să ai grijă la garanție:
*ceea ce este scris cu aldine - **îți dă**,*
*iar ceea ce este scris cu litere foarte mici - **îți ia înapoi**"*
Anonimus

9.1. INTRODUCERE

Competiția din ce în ce mai acerbă, la scară mondială, stimulează producătorii să introducă moduri de abordare inovatoare pentru a-şi mări influența pe piață. În plus față de îmbunătățirea calității şi reducerea prețurilor, ei mai oferă şi condiții de garanție atractive pentru produsele lor. Cu alte cuvinte, garanția devine un factor din ce în ce mai important în opțiunea consumatorului. De exemplu, când mai multe produse care au aceeaşi utilizare se găsesc pe piață şi prețurile lor sunt aceleaşi, preferința consumatorului depinde de reputația producătorului, de tipul şi mărimea perioadei de garanție oferită împreună cu produsul. Din cauza influenței pe care o are garanția asupra vânzărilor viitoare, producători care în mod obişnuit nu ofereau garanție pentru unele produse şi servicii, şi-au schimbat oferta. De exemplu, în S.U.A. nu existau garanții pentru sistemele de muniție până când nu s-a adoptat Legea pentru obținerea de armă în scop de apărare în 1985, cerând producătorului principal de pe piață să ofere garanție scrisă pentru astfel de sisteme. Legea pentru obținerea armelor în scop de apărare menționează, de asemenea, tipul de acoperire care se impune, posibilele reparații şi motivele precise pentru derogări de la lege, precum şi măsurile care trebuie luate în cazul în care o astfel de derogare intră în vigoare. Garanția devine din ce în ce mai importantă atât pentru bunurile de larg consum cât şi pentru cele de uz militar.

Scanned with OKEN Scanner

Garanția este un contract sau o înțelegere conform căreia producătorul se angajează să înlocuiască, să repare sau să asigure service în momentul în care produsul se defectează sau serviciul contract este sub așteptările clientului, înainte de un anumit termen (față de care se stabilește perioada de garanție). Această "perioadă" poate fi măsurată în unități calendaristice: ore, luni și ani sau unități de utilizare: kilometri, ore de operare, număr de utilizări ale produsului (de exemplu, numărul de copii efectuate de un copiator sau numărul de pagini tipărite de o imprimantă). Alte genuri de garanție nu includ termene precise și de aceea sunt numite garanții pe viață.

Pentru bunurile de larg consum sunt frecvente 3 tipuri de garanții: garanție obișnuită de înlocuire liberă, garanția de înlocuire nelimitată și garanția pro-rata. În cazul unei *garanții obișnuite de înlocuire*, dacă un obiect se defectează înaintea terminării perioadei de garanție, trebuie înlocuit sau reparat fără cheltuieli din partea consumatorului. Produsul reparat sau înlocuit este acoperit de o garanție obișnuită de înlocuire cu o mărime egală cu perioada care mai rămâne din garanția inițială.

Un astfel gen de garanții asigură consumatorului oricâte înlocuiri sau reparații sunt necesare atâta timp cât acestea se încadrează. Acesta este unul dintre cele mai utilizate tipuri de garanții: cel mai des este folosit pentru a acoperi produse de larg consum durabile precum mașini și aparatură de bucătărie.

Al II-lea tip de *garanție, cea de înlocuire nelimitată*, este identic cu cel anterior cu excepția că fiecare obiect înlocuit se bucură de o garanție identică cu perioada de garanție a produsului cumpărat inițial. Astfel de garanții sunt folosite doar pentru aparate electronice mici care au o rată de defectare foarte mare și sunt limitate la perioade de timp foarte scurte.

Astfel, sub garanția de înlocuire, fie ea obișnuită sau nelimitată, o perioadă de garanție lungă va duce la un cost foarte mare al garanției. Mai mult decât atât, o prelungire a perioadei va reduce numărul de produse de înlocuire cumpărate pe ciclul de viață al produsului, care, prin urmare, reduce profitul total al producătorului.

Evident, politica de înlocuire liberă este mai benefică pentru consumator decât pentru producător. Deci, este foarte important ca producătorul să determine prețul optim al produsului și mărimea optimă a perioadei de garanție astfel încât să fie minimalizat costul total pe ciclu de viață al produsului.

Al III-lea tip de *garanție este cel pro-rata*. Sub acesta, dacă un produs se defectează înaintea sfârșitului perioadei de garanție, este înlocuit la un cost care depinde de vârsta obiectului la timpul defectării, iar obiectul înlocuit este acoperit de o garanție identică. De obicei, o reducere proporțională cu mărimea perioadei care mai rămâne, este oferită la prețul cumpărării obiectului cu care trebuie să se înlocuiască. De exemplu, dacă mărimea perioadei este "w" și obiectul se defectează la timpul t, ($t<w$), consumatorul plătește o proporție de t/w din costul obiectelor pentru înlocuire (unul dintre cele mai potrivite genuri de produse pentru garanția pro-rata - cauciucurile pentru autovehicule), iar restul costului înlocuitorului este

Scanned with OKEN Scanner

acoperit de producător. Spre deosebire de garanția de înlocuire liberă, garanția pro-rata este mai benefică pentru producător decât pentru consumator.

Așa cum s-a arătat mai sus, o garanție de înlocuire liberă favorizează consumatorul, în timp ce o garanție pro-rata favorizează producătorul. Prin urmare, o combinare a celor două poate reprezenta un model de garanție profitabil în o aceeași măsură atât pentru consumator cât și pentru producător. De exemplu, un program care implică o perioadă inițială de înlocuire liberă urmată de o perioadă pro-rata este unul rezonabil, fiind bun atât pentru consumator cât și pentru producător. El are o latură promoțională pentru a atrage clienții și în același timp menține costul garanției pentru producător la un nivel rezonabil. Există și alte tipuri de garanție cum ar fi: garanția de îmbunătățire a fiabilității în cazul căruia producătorul asigură perioada de garanție după momentul defectării (*MTBF*) sau asigură ajutor pentru modificări tehnice.

În alegerea unei politici de garanție, producătorul ar trebui să aibă în vedere tipul de înlocuiri sau de reparații ce trebuiesc făcute. Produsele se pot clasifica în două categorii: reparabile și ne-reparabile. Produse reparabile sunt cele pentru care costul reparației este semnificativ mai mic decât costul înlocuirii cu produse noi, cum ar fi: aparatele XEROX, computerele, imprimantele, aparatele mari și automobilele.

Produsele nereparabile sunt cele pentru care costul de înlocuire este apropiat de cel de reparare sau cele care nu pot fi reparate datorită dificultăților de accesare.

Exemple tipice: aparate mici, aparate radio, ceasuri ieftine sau sateliți. În cazul politicii de rabat, consumatorului îi este restituită o parte din prețul de vânzare al produsului, dacă acesta se defectează înaintea expirării termenului de garanție.

În aprobarea unui program de garantare, producătorul se confruntă cu două mari probleme.

Aceste probleme necesită determinarea:

- tipului de politică de garantare, mărimea perioadei de garanție și costul acesteia;

- nivelul capitalului care trebuie alocat pentru a acoperi costurile defectărilor în timpul unei anumite perioade de garanție, adică, determinarea sumelor de alocat pentru costuri viitoare datorate garanției. O rezervă pentru garanție prea mare poate face prețul de vânzare ne-competitiv, aceasta ducând la descreșterea volumului de vânzări și a profitului. Pe de alta parte, o rezervă pentru garanție prea mică poate duce la pierderi ascunse care vor influența profitul viitor.

Acest capitol discută diferite politici de garanție și se referă la cele două probleme menționate mai sus, atât pentru produsele reparabile cât și pentru produsele ne-reparabile.

Scanned with OKEN Scanner

9.2. MODELE DE GARANȚIE PENTRU PRODUSE NEREPARABILE

În acest subcapitol se va determina fondul de rezervă al garanției optime pentru produse ne-reparabile când este utilizată o politică de garanție pro-rata. Sub acest gen de politică, un produs este înlocuit de unul nou când este invocată garanția și un rabat, care descreşte liniar cu timpul sau utilizarea produsului, este scăzut din prețul de înlocuire a produsului. Așa cum a fost menționat în secțiunea (9.1.), acest tip de rabat este aplicabil produselor consumabile precum baterii și anvelope.

9.2.1. COSTUL DE GARANȚIE PENTRU PRODUSE NEREPARABILE

Se ia în considerare un produs a cărui funcție a ratei de risc, $h(t)$, este constantă:

$$h(t)=\lambda, \tag{9.1}$$

unde λ este rata de defectare constantă. Probabilitatea defectării la un timp mai mic sau egal cu t, $F(t)$, este:

$$F(t) = 1-e^{\lambda t} \tag{9.2}$$

Timpul mediu de defectare, m, obținut din ecuația (9.1) este $1/\lambda$. Ecuația (9.2) se va rescrie ca:

$$F(t) = 1-e^{\frac{t}{m}} \tag{9.3}$$

Procedura pentru determinarea fondului de rezervă al garanției este următoarea: știind *MTTF* se determină numărul de produse așteptate să se defecteze în cel mai mic interval de timp posibil dt. Apoi se înmulțește numărul de defectări așteptate cu costul de înlocuire la timpul t pentru a estima creșterea rezervei de garanție care trebuie pusă deoparte pentru defectări în timpul intervalului. În final, se adună creșterile costului de garanție pentru toate creșterile dt de la $t = 0$ până la $t = w$ (sfârșitul perioadei de garanție). Rezultatul va fi fondul total de rezervă al garanției.

Se presupune că toate defectările petrecute în timpul perioadei de garanție sunt semnalate. Pentru a transforma această procedură într-o expresie matematică se vor defini următoarele notații /26/:

c = prețul constant pe unitatea de produs, incluzând costul garanției,
t = timpul,
m = *MTTF* -ul produsului,

Scanned with OKEN Scanner

w = durata perioadei de garanție
L = mărimea lotului de produse pentru determinarea rezervei de garanție,
R = fondul de rezervă total al garanției pentru L unități,
$C(t)$ = rabatul pro-rata al clientului la timpul t, $C(t)= c[1- (t/w)]$, $0 < t < w$,
r= costul rezervei de garanție pe unitatea de produs, $r= R/L$,
E = numărul așteptat de defectări la timpul t.

Utilizând ecuația (9.3) se obține numărul așteptat de defectări pentru un timp t:

$$E[N(t)]=L[1- e^{-t/m}].$$

Numărul total de defectări în intervalul t și $t+dt$ este:

$$dE[N(t)] = \frac{\partial E[N(t)]}{\partial t} dt = (L/m)e^{-t/m} dt$$

Costul defectărilor în intervalul t și $t+dt$ este:

$$d(R) = C(t)dE[N(t)] = c(1-\frac{t}{w})(L/m)e^{-t/m} dt \qquad (9.4)$$

Costul total, pentru toate defectările care au loc de la $t = 0$ până la $t = w$, este:

$$R = \int_0^w \frac{Lc}{m}(1-\frac{t}{w})e^{-t/m} dt$$

sau

$$R = Lc[1-(\frac{m}{w})(1-e^{-w/m})] \qquad (9.5)$$

Fondul de rezervă pentru garanție, per-unitate, este:

$$r = \frac{R}{L} = c[1-\left(\frac{m}{w}\right)(1-e^{-w/m})]$$

Astfel,

$$\frac{r}{c} = 1-\left(\frac{m}{w}\right)(1-e^{-w/m}) \qquad (9.6)$$

Fie c' prețul pe unitate înainte să fie adăugat costul garanției. Atunci,

Scanned with OKEN Scanner

$$c = c' + r$$

şi

$$c' = c(1 - r/c)$$

sau

$$c = \frac{c'}{1 - \frac{r}{c}} \tag{9.7}$$

Fondul total de rezervă pentru garanţie care trebuie alocat pentru L unităţi de produs este obţinut din ecuaţia (9.5).

Raportul dintre costul rezervei de garanţie şi costul produsului creşte în acelaşi ritm cu raportul dintre durata garanţiei şi creşterea *MTTF* -lui, aşa cum se arată în graficul din fig. 9.1.

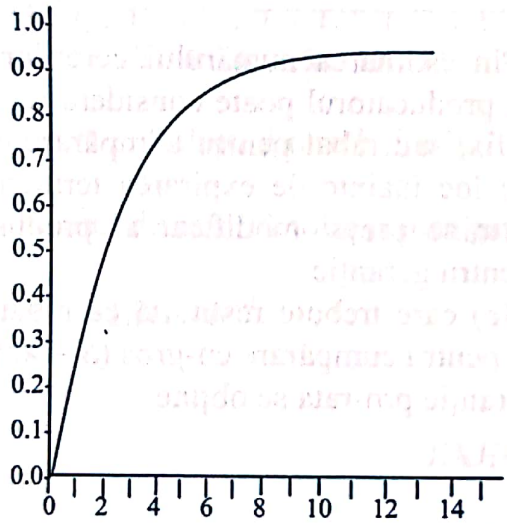


Fig. 9.1. Relaţia dintre *r/c* şi *w/m*

EXEMPLUL 9.1

Se presupune că un producător de aparate radio cu unde scurte doreşte să adopte o garanţie de 12 luni pentru un nou tip de radiouri. A fost desfăşurat un test accelerat al duratei de viaţă care a indicat că timpul de defectare a radioului urmăreşte o distribuţie exponenţială cu parametrul λ=0,02 defectări pe lună. Preţul la producător a aparatului(neinclunzând costul garanţiei)este de 50 RON. Presupunând o producţie totală de 5000 de aparate, să se determine fondul de rezervă pentru garanţie şi preţul modificat al radioului.

w = 12 luni, c' = 50 RON, $m = 1/\lambda$ = 50 luni, L = 5000 unităţi .

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare

Folosind ecuația (9.6) se obține:

$$\frac{r}{c} = 1 - \frac{50}{12}(1 - e^{\frac{12}{50}}) = 0{,}111$$

Folosind ecuația (9.7) se va obține prețul modificat al aparatului:

$$c = \frac{c'}{1 - \frac{r}{c}} = \frac{50}{1 - 0{,}111} = 56{,}24 RON$$

Fondul de rezervă pentru garanție pentru 5000 radiouri este:

$R=0{,}111$ x 5000 x $56{,}24$ = 31.213 *RON.*

9.2.2. FONDUL DE REZERVĂ PENTRU GARANȚIE. RABATUL PENTRU PRODUSE CUMPĂRATE EN-GROS

Dacă costul administrativ şi erorile în estimarea numărului cererilor pentru garanție pro-rata conduc la sume prea mari, producătorul poate considera un plan de garanție alternativ prin plătirea unui rabat fix, sau rabat pentru cumpărare en-gros, clientului pentru defecțiunile care pot avea loc înainte de expirarea termenului de garanție. Deci, este important să se determine prețul modificat al produsului şi rezerva pentru garanție, conform cererilor pentru garanție.

Fie k proporția din costul pe unitate(c) care trebuie restituită ca rabat pentru cumpărare en-gros şi fie S unitatea rabatului pentru cumpărare en-gros ($S = kc$).

Substituind $C(t)= kc$ în modelul de garanție pro-rata se obține:

$$r_S = kc(1 - e^{-w/m}),$$

unde r_S este costul rezervei de garanție per-unitate sub planul de garanție pentru cumpărare en-gros.

Dacă este de dorit să fie costul garanției pe unitate egal pentru amândouă planurile, pro-rata şi de cumpărare en- gros, atunci:

$$1 - \frac{m}{w}(1 - e^{-\frac{w}{m}}) = k(1 - e^{-\frac{w}{m}})$$

sau

$$k = \frac{1}{1 - e^{-w/m}} - \frac{m}{w} \qquad (9.8)$$

Proporția costului pe unitate care trebuie restituit ca rabat pentru cumpărare en-gros ca o funcție a raportului w/m este prezentată în figura (9.2). Rabatul pe unitate

pentru cumpărare en-gros devine :

$$S = kc.$$

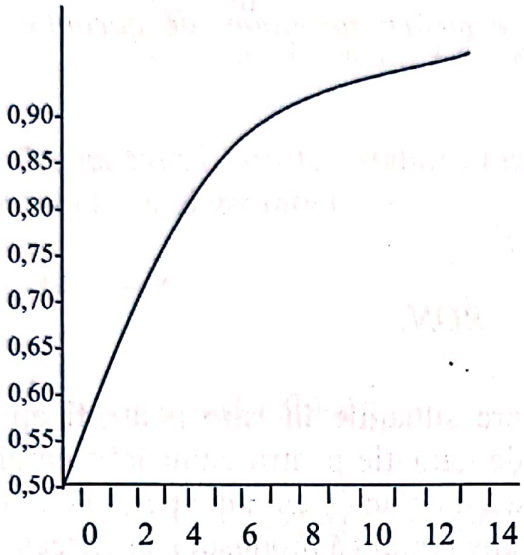


Fig. 9.2. Relația dintre k şi w/m

Fondul de rezervă total pentru garanție, R_S, este:

$$R_S = LS(1-e^{-w/m}) \tag{9.9}$$

EXEMPLUL 9.2

Se presupune că producătorul de radiouri din exemplul (9.1) doreşte să adopte un plan de garanție pentru cumpărare en-gros echivalent cu planul - rată prin oferirea unei sume din prețul inițial clienților a căror radiouri se defectează în timpul perioadei de garanție. Să se determine proporția din preț care trebuie să fie restituită la defectare înainte să expire garanția.

Rezolvare

Se folosesc aceleaşi date pentru aparatele de radio:

$w=12$ *luni,* $c'=50$ *RON,* $m=50$ *luni,* $L=5000$ *unități.*

Mai întâi se determină proporția din costul pe unitate care trebuie să fie restituită, prin folosirea ecuației (9.8):

Scanned with OKEN Scanner

$$k = \frac{1}{1-e^{-w/m}} - \frac{m}{w} = \frac{1}{1-e^{-\frac{12}{50}}} - \frac{50}{12} = 0{,}523$$

Cu alte cuvinte producătorul ar trebui să plătească 52% din prețul inițial clienților ale căror radiouri se defectează înaintea expirării perioadei de garanție. Costul garanției per-unitate este:

$c = c' + r = 56{,}24$ *RON*

și

$S = ck = 29{,}41$ *RON.*

Fondul total de rezervă pentru garanție este:

$$R_S = 5000 \times 29{,}41(1-e^{-\frac{12}{50}}) = 31.376 \quad RON.$$

Este important să se ia în considerare situațiile în care poate fi aplicată o politică de garanție pro-rata sau o politică de garanție pentru cumpărări en-gros. De exemplu, un producător ar trebui să folosească un plan de garanție pentru cumpărători en-gros atunci când este posibil să se determine faptul că produsul s-ar defecta înainte de expirarea perioadei de garanție, însă nu se poate ști cu exactitate momentul defectării.

Modelul discutat în paragrafele (9.2.1) și (9.2.2) exagerează rezerva pentru fondul de garanție deoarece în decontarea viitoarelor cereri pentru garanție au fost ignorate atât variația în timp a raportului RON/EURO, cât și schimbările în nivelul general al prețurilor datorate inflației (sau deflației).

Fie θ rata de înapoiere/restituire câștigată prin investirea în fondul de rezervă pentru garanție și ϕ schimbarea așteptată în nivelul general al prețurilor. Atunci, valoarea prezentă reală a cererilor pentru garanție /9/ în perioada t și $t+dt$ este obținută prin rescrierea ecuației (9.4) astfel:

$$d(R^*) = c^*\left(1-\frac{t}{w}\right)(1+\theta+\phi)^{-t}\left(\frac{L}{m}\right)e^{-\frac{t}{m}}dt \qquad (9.10)$$

unde R^* și c^* sunt valorile actuale ale fondului de rezervă pentru garanții și respectiv ale prețului produsului și $(1+\theta)^n(1+\phi)^n \approx (1+\theta+\phi)^n$, pentru cele mai mici valori ale lui θ și ϕ. Ecuația (9.10) poate fi scrisă ca:

$$R^* = \frac{Lc^*}{m}\int_0^w \left(1-\frac{t}{w}\right)\left[(1+\theta+\phi)e^{\frac{1}{m}}\right]^{-t} dt$$

Scanned with OKEN Scanner

$$= \left\{ \frac{Lc^*}{1 + m\ln(1+\theta+\phi)} \right\} \times$$

$$\left\{ 1 - \left(\frac{m}{w}\right) \frac{1}{1 + m\ln(1+\theta+\phi)} \times \left[1 - (1+\theta+\phi)^{-w} e^{-\frac{w}{m}} \right] \right\} \qquad (9.11)$$

Producătorul poate stabili următorul preţ per-unitate produsului său, încorporând costul garanţiei :

$$c^* = c' + r^*$$

unde

$$\frac{r^*}{c^*} = \left[1 + m\ln(1+\theta+\phi)\right]^{-1} \times$$

$$\left\{ 1 - \frac{m}{w}\left[1 + m\ln(1+\theta+\phi)\right]^{-1} \left[1 - (1+\theta+\phi)^{-w} e^{-\frac{w}{m}} \right] \right\} \qquad (9.12)$$

şi

$$r^* = \frac{R^*}{L} \qquad (9.13)$$

EXEMPLUL 9.3

Producătorul radiourilor din exemplul (9.1) intenţionează să investească în fondul de rezervă pentru garanţie pentru a câştiga o dobândă de 8% şi pentru a mări preţul aparatului în cursul anului următor cu 9%. Să se calculeze fondul de rezervă pentru garanţie şi preţul radioului după modificări.

Rezolvare

Următoarele date au fost oferite în exemplul (9.1):

$w = 12$ *luni,* $c' = 50$ *RON,* $m = 50$ *luni,* $L = 5000$ *unităţi .*

Se va include acum efectul valorilor θ *şi* ϕ *:*

$(1 + \theta + \phi) = 1 + 0{,}08 + 0{,}09 = 1{,}17.$

Se obţine r/c* din ecuaţia (9.12):*

$$\frac{r^*}{c^*} = (1 + 50\ln 1{,}17)^{-1} \left\{ 1 - \frac{50}{12}(1 + 50\ln 1{,}17)^{-1} \left[1 - \left(1{,}17^{-12} e^{-\frac{12}{50}} \right) \right] \right\}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$= 0,113 \text{ x } 0,47 \text{ x } 0,88 = 0,046$$

dar

$$c^* = \frac{c'}{1 - \frac{r^*}{c^*}} = \frac{50}{1 - 0,046} = 52,41 \quad RON$$

şi

$$R^* = L \times \frac{r^*}{c^*} \times c^* = 5000 \times 0,046 \times 52,41 = 12.054 \quad RON.$$

Aceste estimări sunt mai mici decât cele de la exemplul (9.1).

9.2.3. POLITICI DE GARANŢIE COMBINATE

În cele două subcapitole anterioare s-a prezentat tipul de garanţie pro-rata şi tipul de garanţie pentru cumpărări en-gros. Prima dintre ele, pe care am numit-o politica de garanţie cu rabat integral, poate fi folosită atunci când un produs poate fi vândut sub garanţie integrală. Dacă o defectare are loc în w_0 unităţi de timp, produsul este înlocuit fără vreo contribuţie din partea consumatorului şi este oferită o nouă perioadă de garanţie. Al doilea tip, este o politică de garanţie combinată în care este asigurată o compensaţie integrală consumatorului dacă produsul se defectează înaintea termenului w_1, urmată de o compensaţie pro-rata liniară până la sfârşitul perioadei acoperite de garanţie w_2. Pentru a simplifica analiza, se vor defini următoarele notaţii /9/:

w_0 = durata garanţiei cu rabat integral,
w_1 = durata perioadei de compensare integrală pentru tipul de garanţie combinată,
w_2-w_1 = durata perioadei de garanţie pro-rata pentru tipul de garanţie combinată,
c_0 = costul unităţii înlocuite,
ϕ = notaţie pentru tipul de garanţie cu rabat integral,
ψ = notaţie pentru garanţia combinată,
X_i = timpul dintre defectările i şi i-1: $X_i > 0$,
$I(X_i)$ = preţul plăţii de către producător, pentru o defectare sub un tip de garanţie dat (ϕ sau ψ),
V = variabilă aleatoare reprezentând costul total al garanţiei acumulate per produs,
$F(X_i)$, $R(X_i)$ = funcţia cumulativă de distribuţie şi funcţia de fiabilitate a lui X: $R(X_i) = 1 - F(X_i)$,

Scanned with OKEN Scanner

$$F^{(2)}(x) = \int_0^x F(w)dw \qquad F^{(3)}(x) = \int_0^x F^{(2)}(w)dw$$

N'= numărul de defectări care au loc până ce timpul defectării depăşeşte perioada de garanţie.

Cele două tipuri de garanţie sunt prezentate în fig. (9.3). Preţul asociat cu tipul de garanţie cu rabat integral este:

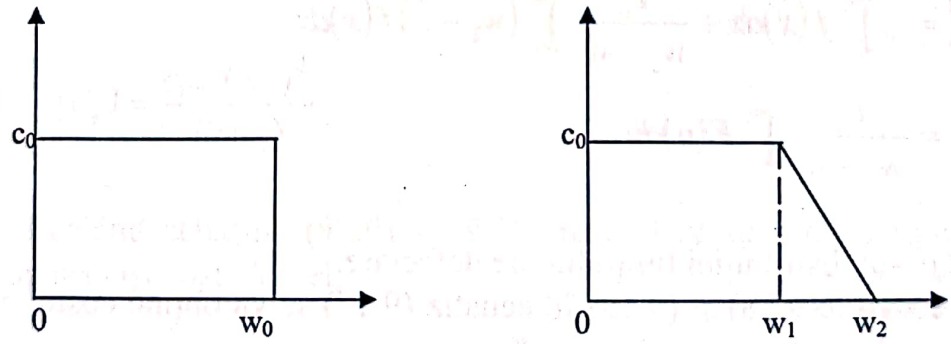
$$I_\phi(X_i) = \begin{cases} c_0 \rightarrow 0 \le X_i \le w_0 \\ 0 \rightarrow altfel \end{cases} \tag{9.14}$$

Preţul asociat cu garanţia combinată este:

$$I_\phi(X_i) = \begin{cases} c_0 \rightarrow 0 \le X_i \le w_1 \\ c_0(w_2 - X_i)/(w_2 - w_1) \rightarrow w_1 \le X_i \le w_2 \\ 0 \rightarrow altfel \end{cases} \tag{9.15}$$

Cheltuielile totale acumulate pentru fiecare produs vândut sunt:

$$V = \sum_{i=1}^{N'} I(X_i) \tag{9.16}$$



Strategia cu rabat integral, ϕ Strategia mixtă, ψ

Figura 9.3. Tipuri de garanţie

Variabila decizională pentru tipul de garanţie cu rabat integral ϕ este w_0, în timp ce variabilele deciziei pentru garanţia combinată ψ sunt egale cu timpul de compensaţie integrală şi timpul total al duratei perioadei de garanţie.

De aici rezultă costul total aşteptat al garanţiei, pentru un produs aflat sub garanţia ψ:

Scanned with OKEN Scanner

$$E[V_\psi] = E\left\{E\left[\sum_{i=1}^{N'} I_\psi(X_i)\right]\right\}$$

Deoarece N' este timpul de staționare,

$$E[V_\psi] = E[N']E[I_\psi(X_i)] \tag{9.17}$$

Dar N' este geometric, adică:

$$P[N' = k] = [1 - F(w_2)][F(w_2)]^k \qquad k = 0,1,2,...$$

sau

$$P[N' = k] = R(w_2)F(w_2)^k$$

Deci,

$$E[N'] = \sum_{k=0}^{\infty} kR(w_2)F(w_2)^k = F(w_2)/R(w_2) \tag{9.18}$$

Mai mult decât atât:

$$E[I_\psi(X_i)] = c_0 \int_0^{w_1} f(x)dx + \frac{c_0}{w_2 - w_1}\int_{w_1}^{w_2}(w_2 - x)f(x)dx$$
$$= \frac{c_0}{w_2 - w_1}\int_{w_1}^{w_2} F(u)du \tag{9.19}$$

unde *f(x)* este *f.d.p.* -ul distribuției timpului de defectare.

Înlocuind ecuațiile(9.18) şi (9.19) în ecuația (9.17) se va obține costul aşteptat al garanției unui produs sub o garanție ψ ca fiind :

$$E[V_\psi] = \frac{c_0 F(w_2)}{(w_2 - w_1)R(w_2)}\int_{w_1}^{w_2} F(u)du \tag{9.20}$$

EXEMPLUL 9.4

Se ia în considerare un produs cu o rată de defectare constantă cu timpul mediu de defectare egal cu 80 luni. Se intenționează să se folosească o garanție combinată cu

Scanned with OKEN Scanner

w_1= 4 luni şi w_2= 12 luni. Preţul unei înlocuiri este de 150 RON. Care este preţul aşteptat al garanţiei?

Rezolvare

Deoarece produsul prezintă o rată de defectare constantă, atunci:

$$F(x_i)=1-e^{\frac{-x_i}{80}} \qquad x_i \geq 0$$

$$R(x_i)=e^{\frac{-x_i}{80}}$$

Folosind ecuaţia (9.20) se obţine:

$$E[V_\psi]=\frac{150F(w_2)}{(12-4)R(w_2)}\int_4^{12}1-e^{\frac{x}{80}}dx=4{,}1 \quad RON.$$

Pentru fiecare garanţie combinată ψ, există o politică de garanţie cu rabat integral ϕ care conduce la acelaşi preţ. Preţul aşteptat al unei defectări în cazul garanţiei de rabat integral este:

$$E[I_\phi(X_i)]=c_0F(w_0) \tag{9.21}$$

Folosind ecuaţiile (9.17), (9.18) şi (9.21), se obţine:

$$E[V_\phi]=\frac{c_0F(w_0)^2}{R(w_0)} \tag{9.22}$$

Egalând ecuaţiile (9.20) şi (9.22) rezultă că cele două tipuri de garanţii vor avea un acelaşi cost. Astfel,

$$\frac{F(w_0)^2}{R(w_0)}=\frac{F(w_2)}{R(w_2)}\frac{1}{(w_2-w_1)}\int_{w_1}^{w_2}F(u)du$$

egalitate redusă la:

$$\frac{F(w_0)^2}{R(w_0)}=\frac{F(w_2)}{R(w_2)}\frac{F^{(2)}(w_2)-F^{(2)}(w_1)}{(w_2-w_1)} \tag{9.23}$$

Dacă se ia în considerare o garanţie pro-rata liniară (w_1= 0), atunci ecuaţia de mai sus poate fi scrisă ca:

Scanned with OKEN Scanner

$$\frac{F(w_0)^2}{R(w_0)} = \frac{F(w_2)}{R(w_2)} \frac{F^{(2)}(w_2)}{w_2} \tag{9.24}$$

Cu alte cuvinte, cele două politici de garanție sunt echivalente dacă w_0 este ales în așa fel încât ecuația (9.24) să fie respectată.

Nu este suficient să comparăm cele două garanții doar pe baza costului așteptat deoarece variația prețului (sau distribuția sa) poate influența alegerea politicii de garanție. Deci, este necesar ca variațiile prețului să fie calculate. Elsayed /9/ propune următoarele expresii pentru variațiile costului total al garanției:

- Pentru o politică de garanție pro-rata liniară ψ, cu $w_1 = 0$,

$$Var(V_\psi) = c_0^2 F(w_2)\left[2R(w_2)F^{(3)}(w_2) + F^{(2)}(w_2)^2 F(w_2)\right] / w_2^2 R(w_2)^2 \tag{9.25}$$

- Pentru politica de garanție cu rabat integral ϕ, variația este

$$Var(V_\phi) = c_0^2 F(w_2)^2 \left[R(w_0)^2 + F(w_0)\right] / R(w_0)^2 \tag{9.26}$$

când

$$F(w) = 1 - e^{-\lambda w} \qquad w \geq 0,$$

și λ este rata defectărilor, atunci:

$$F^{(2)}(w) = \left[\lambda w - F(w)\right] / \lambda \tag{9.27}$$

$$F^{(3)}(w) = (\lambda w - 1)^2 + (2F(w) - 1) / 2\lambda^2 \tag{9.28}$$

Înlocuind ecuațiile (9.27) și (9.28) în ecuația (9.25) rezultă:

$$Var(V_\psi) = \frac{c_0^2 F(w_2)}{\left[\lambda w_2 R(w_2)\right]^2}\left[(\lambda w_2 - 1)^2 + 2F(w_2) - 1\right]R(w_2) \tag{9.29}$$

Timpul așteptat al primei defectări care nu este acoperit de costul garanției este:

$$E[T] = E[X_i] / R(w_2) \tag{9.30}$$

unde $E(X_i)$ este media timpului de defectare.

Scanned with OKEN Scanner

EXEMPLUL 9.5

Folosind perioadele de garanție w_2=10 și w_0= 8 care fac ca o garanție pro-rata să fie echivalentă cu garanția cu rabat integral, determinați variațiile costului total de garanție pentru fiecare garanție, pentru datele din exemplul precedent. Ce fel de garanție se preferă?

Rezolvare

Din (9.29) se obține variația pentru garanția pro-rata ca:

$$Var(V\psi)=\frac{150^2\left(1-e^{-\frac{12}{80}}\right)}{\left(\frac{12}{80}\times e^{-\frac{12}{80}}\right)^2}\left[\left(\frac{12}{80}-1\right)^2+2\left(1-e^{-\frac{12}{80}}\right)-1\right]e^{-\frac{12}{80}}=80{,}7$$

Folosind (9.26), variația pentru garanția cu rabat integral este:

$$Var(V_\phi)=\frac{150^2\left[1-e^{-\frac{8}{80}}\right]^2}{\left(e^{-\frac{8}{80}}\right)^2}\left[\left(e^{-\frac{8}{80}}\right)^2+\left(1-e^{-\frac{8}{80}}\right)\right]=216{,}21$$

Deoarece cele două garanții sunt echivalente, producătorul ar trebui să adopte garanția pro-rata pentru a reduce variabilitatea costului total.

9.2.4. ÎNLOCUIRI OPTIME PENTRU OBIECTE AFLATE ÎN GARANȚIE

O înlocuire tipică funcție de vârsta obiectului aflat în garanție cere înlocuirea acestuia la defectare sau la un anumit timp, funcție de care dintre acestea are loc mai întâi. Evident, o astfel de strategie este aplicabilă doar în cazul obiectelor ale căror rate de defectare cresc în funcție de vârstă. În acest subcapitol, se va dezvolta un model pentru determinarea funcțiilor optime ale garanțiilor, așa încât costul mediu să fie minim.

Se presupune că un obiect nereparabil aflat în garanție este pus în funcțiune la timpul zero. Dacă acesta se defectează în timpul perioadei de garanție, este înlocuit la un preț împărțit între client și producător (ca în cazul garanției liniare pro-rata) în concordanță cu garanția rabat. După ce aceasta expiră, urmează o garanție pe bază de vechime, obiectul fiind înlocuit după un timp adițional fixat sau la defectare – depinde care dintre aceste două situații se întâmplă mai întâi. Se definesc următoarele notații:

Scanned with OKEN Scanner

ϕ = tipul de garanție,
w = durata perioadei de garanție,
X_i = timpul până la defectarea cu numărul i,
$F(t)$ = *f.d.c.* -ul timpului de defectare,
$R(t)$ = funcția de fiabilitate la timpul t,
$h(t)$ = rata de defectare la timpul t,
$F_r(t)$ = *f.d.c.* -ul. duratei de viață ce depășește w,
$f_r(t)$ = *f.d.p.* -ul duratei de viață ce depășește w,
$[N(t),\ t>0]$ = numărul de defectări în intervalul $(0,\ t)$,
$m(t) = E[N(t)]$ = funcția de înnoire,
Y = timpul pentru care prima defectare are loc în afara garanției, adică
$Y \equiv f[t \mid N(t) = N(w) + 1]$,
$r(w)$ = rezervă de viață a obiectului la timpul w, $r(w) = Y - w$,
T = parametrul înlocuirii în funcție de vârstă, măsurat de la sfârșitul perioadei de garanție,
T_r = timpul între înlocuiri în afara intervalului de garanție,
$T_r \equiv min(T+w,\ Y)$,
$G(T) = \int_0^T x f_r(x)dx$ perioada de timp până la înlocuire, în afara duratei w,
$\hat{C}(T)$ = costul adițional dintre înlocuiri, în afara intervalului de garanție,
c_1 = costul înlocuirii unui obiect defectat,
c_2 = costul înlocuirii unui obiect care funcționează,
$I_j(\phi)$ = costul suportat de consumator pentru înlocuirea j a obiectului aflat sub garanția de tip ϕ,
W_ϕ = costul total al înlocuirilor pe durata perioadei de garanție.

Garanția de înlocuire în funcție de vârstă este ilustrată în graficele prezentate în figurile (9.4) și (9.5).

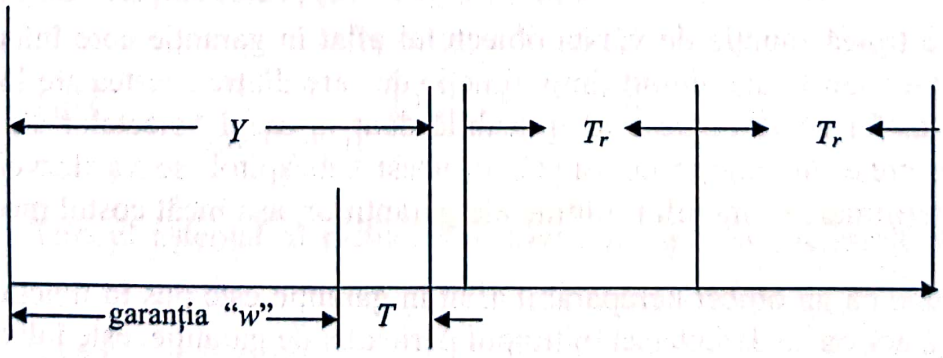


Fig. 9.4. Înlocuirea în cazul defectării la timpul "Y"

Scanned with OKEN Scanner

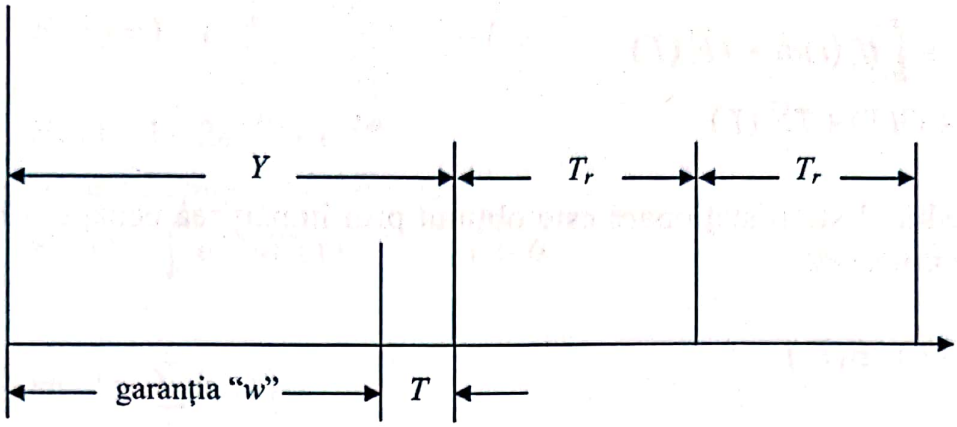


Fig. 9.5. Înlocuirea în cazul funcționării până la timpul de înlocuire.

Se ia în considerare o politică de garanție pro-rata liniară. Costul înlocuirii unui obiect *j* care se defectează înaintea perioadei de garanție *w* este:

$$I_j(\phi) = X_j c_1 / w \qquad \text{pentru } X_j < w \tag{9.31}$$

Costul mediu al înlocuirilor suportat de consumator pe toată perioada de garanție este :

$$W_\phi = E\left[\sum_{j=1}^{N(w)} I_j(\phi)\right] \tag{9.32}$$

Dacă obiectul supraviețuieşte în afara perioadei de garanție, rezerva de viață, *r(w)*, este o variabilă aleatoare cu *f.d.p.* -ul propus de /9/:

$$F_r(t) = F(w+t) - \int_0^w R(w+t-x)dm(x) \tag{9.33}$$

Costul adițional al ciclului T_r de înlocuire integrală este suma dintre cheltuielile pentru garanție pe toată perioada *w* şi costul de înlocuire a unui obiect defectat la timpul *Y* (aşa cum s-a arătat în graficul din fig.9.4) sau a unui obiect ce funcționează la timpul (*T* + *w*). Costul aşteptat pe toată durata ciclului este:

$$\begin{aligned}\hat{C}(T) &= W_\phi + c_1 \int_0^T f_r(x)dx + c_2 \int_T^\infty f_r(x)dx \\ &= W_\phi + c_1 F_r(T) + c_2 \overline{F}_r(T)\end{aligned} \tag{9.34}$$

În mod analog, timpul mediu dintre înlocuiri este:

Scanned with OKEN Scanner

$$E[T_r] = w + \int_0^T t f_r(t)dt + T\overline{F}_r(T)$$
$$= w + G(T) + T\overline{F}_r(T) \qquad (9.35)$$

Costul mediu al stării staționare este obținut prin împărțirea ecuației (9.34) la (9.35) după cum urmează:

$$\overline{C}(T) = \hat{C}(T) / E(T_r) \qquad (9.36)$$

Obiectivul urmărit este determinarea lui T^*, care minimizează $\overline{C}(T)$.

EXEMPLUL 9.6

Se ia în considerare un obiect care prezintă o rată de defectare constantă "λ". Care este intervalul optim de înlocuire?

Rezolvare

Deoarece rata de defectare este constantă, atunci h(t) = λ şi :

$$F_r(t) = 1 - e^{-\lambda t} \qquad 0 \le t < \infty$$

Înlocuind în ecuația (9.36):

$$\overline{C}(T) = \frac{W_\phi + c_1(1 - e^{-\lambda T}) + c_2 e^{-\lambda T}}{w + (1 - e^{-\lambda T})/\lambda}$$

$\overline{C}(T)$ *este monoton descrescător în funcție de "T". Deci, politica optimă ar fi că obiectele nu ar trebui să fie înlocuite înaintea defectării.*

EXEMPLUL 9.7

Un sistem "hot" stand-by este alcătuită două componente, dispuse în paralel. Costul înlocuirii unei unități defectate este 11RON, ratele de defectare ale componentelor sunt identice, λ = 0,2 defectări pe lună, W_ϕ=1 şi perioada de garanție este de cinci luni. Care este intervalul de înlocuire optim?

Rezolvare

Distribuirea defectării celor două componente în paralel este:

$$F(x) = \prod_{j=1}^{2} F_i(x)$$

Fie

Scanned with OKEN Scanner

$$F_i(x) = 1 - e^{-\lambda x} \qquad i=1,\ 2.$$

atunci

$$F(x) = 1 - 2e^{-\lambda x} + e^{-2\lambda x}$$

Transformata Laplace a lui F este:

$$F^*(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dF(x) \qquad x > 0$$

şi

$$m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x)$$

Transformata Laplace a lui m este:

$$m^*(s) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n^*(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[F^*(s)\right]^n$$

$$m^*(s) = \frac{F^*(s)}{1 - F^*(s)}$$

Din ecuaţiile de mai sus, se obţine:

$$F^*(s) = \frac{2\lambda^2}{(s+\lambda)(s+2\lambda)}$$

$$m^*(s) = \frac{2\lambda}{3s} - \frac{2\lambda}{3s+9\lambda}$$

Deci

$$m'(x) = \frac{2\lambda}{3} - \frac{2\lambda}{3} e^{-3\lambda x}$$

Din ecuaţia (9.33), se obţine distribuţia duratei de viaţă reziduale după timpul t ca fiind:

$$F_r(t) = 1 - 2e^{-\lambda(w+t)} + e^{-2\lambda(w+t)} + \frac{4}{3} e^{-\lambda(w+t)}[e^{\lambda w} - 1]$$

$$- \frac{1}{3} e^{-2\lambda(w+t)} - \frac{2}{3} e^{-\lambda(w+t)}[1 - e^{-2\lambda w}]$$

$$+ \frac{2}{3} e^{-2\lambda(w+t)}[1 - e^{-\lambda w}]$$

sau

$$F_r(t) = 1 - 1{,}25e^{-0{,}2t} + 0{,}15e^{-0{,}4t}$$

şi

$$h(t) = \frac{0.25e^{-0{,}2t} - 0{,}06e^{-0{,}4t}}{1{,}25e^{0{,}2t} - 0{,}15e^{-0{,}4t}}$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece h(t) este o funcție monoton ne-descrescătoare, există un T finit care minimizează* $\overline{C}(T)$ *. Admițând* $c_2 = 5RON$ *și înlocuind în ecuația (9.36) se obține:*

$$\overline{C}(t) = \frac{e^{-0,4T} - 8\frac{1}{3}e^{0,2T} + 13\frac{1}{3}}{e^{0,4T} - 16\frac{2}{3}e^{-0,2T} + 2\frac{1}{3}} \quad \Rightarrow \quad T^* = 3,85 \text{ luni.}$$

9.3.MODELE DE GARANȚIE PENTRU PRODUSELE REPARABILE

Majoritatea produselor sunt reparabile în cazul defectării. Garanția pentru astfel de produse poate avea o durată fixă în termeni de timp calendaristic sau alte măsuri ale uzurii. Astfel de produse pot avea garanție pe toată durata de viață(nelimitată), ceea ce înseamnă că producătorul trebuie să repare sau să înlocuiască produsul atâta timp cât, defectat, se află încă în posesia consumatorului.

Durata de viață a produsului poate ajunge la final datorită uzurii morale, schimbărilor în design, schimbărilor proprietarului, sau defectărilor unor componente esențiale asupra cărora nu este extinsă garanția.

9.3.1. COSTUL GARANȚIEI PENTRU PRODUSELE REPARABILE

Se ia în considerare un produs ce se poate defecta. Îi sunt făcute reparațiile minime pentru a-l aduce la o condiție medie de funcționabilitate, pentru un produs cu vechimea sa. Cu alte cuvinte, i se fac reparațiile necesare pentru a fi adus în stare operațională. Produsul are o perioadă de garanție *w*. Dacă produsul se defectează înainte de atingerea lui *w* este adus în condiții de operabilitate prin reparații minime, fiind astfel comparabil cu alte produse având aceeași vechime. După reparație nu este oferită nici un fel de extensie a garanției *w*. Se va dezvolta în continuare un model pentru a determina valoarea actuală a reparațiilor în timpul perioadei *w* /28/.
Se vor defini următoarele notații:

$R(t)$ = fiabilitatea produsului la timpul t,
λ = parametrul de scară tip Weibull,
β = parametrul de formă tip Weibull,
$h(t)$ = rata de risc a produsului la timpul t,
$H(t) = \int_0 h(t)dt$, funcția de risc cumulativă,
$f_n(t)$ = *f.d.p.* -ul defectării de indice n,
r = costul mediu pe reparație,
i = rata nominală a dobânzii pentru rabatul costurilor viitoare,

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece h(t) este o funcție monoton ne-descrescătoare, există un T finit care minimizează* $\overline{C}(T)$ *. Admițând* $c_2 = 5RON$ *și înlocuind în ecuația (9.36) se obține:*

$$\overline{C}(t) = \frac{e^{-0,4T} - 8\frac{1}{3}e^{0,2T} + 13\frac{1}{3}}{e^{0,4T} - 16\frac{2}{3}e^{-0,2T} + 2\frac{1}{3}} \quad \Rightarrow \quad T^* = 3,85 \text{ luni.}$$

9.3.MODELE DE GARANȚIE PENTRU PRODUSELE REPARABILE

Majoritatea produselor sunt reparabile în cazul defectării. Garanția pentru astfel de produse poate avea o durată fixă în termeni de timp calendaristic sau alte măsuri ale uzurii. Astfel de produse pot avea garanție pe toată durata de viață(nelimitată), ceea ce înseamnă că producătorul trebuie să repare sau să înlocuiască produsul atâta timp cât, defectat, se află încă în posesia consumatorului.

Durata de viață a produsului poate ajunge la final datorită uzurii morale, schimbărilor în design, schimbărilor proprietarului, sau defectărilor unor componente esențiale asupra cărora nu este extinsă garanția.

9.3.1. COSTUL GARANȚIEI PENTRU PRODUSELE REPARABILE

Se ia în considerare un produs ce se poate defecta. Îi sunt făcute reparațiile minime pentru a-l aduce la o condiție medie de funcționabilitate, pentru un produs cu vechimea sa. Cu alte cuvinte, i se fac reparațiile necesare pentru a fi adus în stare operațională. Produsul are o perioadă de garanție *w*. Dacă produsul se defectează înainte de atingerea lui *w* este adus în condiții de operabilitate prin reparații minime, fiind astfel comparabil cu alte produse având aceeași vechime. După reparație nu este oferită nici un fel de extensie a garanției *w*. Se va dezvolta în continuare un model pentru a determina valoarea actuală a reparațiilor în timpul perioadei *w* /28/.
Se vor defini următoarele notații:

$R(t)$ = fiabilitatea produsului la timpul t,
λ = parametrul de scară tip Weibull,
β = parametrul de formă tip Weibull,
$h(t)$ = rata de risc a produsului la timpul t,
$H(t) = \int h(t)dt$, funcția de risc cumulativă,
$f_n(t)$ = *f.d.p.* -ul defectării de indice n,
r = costul mediu pe reparație,
i = rata nominală a dobânzii pentru rabatul costurilor viitoare,

Scanned with OKEN Scanner

C_w = valoarea actuală a reparației în timpul de garanție w,
C_∞ = valoarea actuală a reparației pentru un produs cu garanție pe toată durata de viață,
$poim(k;\mu)$ = funcția *Poisson* de probabilitate medie: $\mu^k e^{-\mu}/k!$.

Deoarece după cădere se fac reparații minime și rata de risc se reduce la $h(t)$ în loc de a reveni la $h(0)$, timpii defectărilor sistemului nu sunt puncte de înnoire dar pot fi asociați unui proces Poisson neomogen. Densitatea de probabilitate a timpului la a n-a defectare este :

$$f_n(t) = h(t)\,poim(n-1; H(t))$$

sau

$$f_n(t) = \lambda\beta(\lambda t)^{\beta-1}\left\{\exp\left[-(\lambda t)^{\beta}\right](\lambda t)^{(n-1)\beta}/\Gamma(n)\right\} \tag{9.37}$$

pentru o distribuție Weibull, unde $H(t) = (\lambda t)^{\beta}$.

Valoarea actuală a reparațiilor din timpul perioadei de garanție este:

$$C_w = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^w re^{-it} f_n(t)dt = r\beta\int_0^{\lambda w}\exp[-iu/\lambda]u^{\beta-1}du$$
$$= r\beta(\lambda w)^{\beta}\exp(-iw)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(iw)^k}{\beta(\beta+1)...(\beta+k)} \tag{9.38}$$

sau

$$C_w = r\beta(\lambda/i)^{\beta}\exp(-iw)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(iw)^{\beta+k}}{\beta(\beta+1)...(\beta+k)} \tag{9.39}$$

Pentru o garanție nelimitată, costul este obținut ca:

$$C_\infty = r\int_0^\infty h(t)e^{-it}dt$$

$$C_\infty = r\left(\frac{\lambda}{i}\right)^{\beta}\Gamma(\beta+1) \tag{9.40}$$

EXEMPLUL 9.8

Componenta cea mai importantă a unui produs are o rată de defectare constantă de 0,5 defectări pe an. Costul mediu al unei reparații este de $r = 15RON$ și rata

Scanned with OKEN Scanner

nominală a dobânzii este 8% pe an. Care este costul aşteptat al garanţiei pentru doi ani?

Rezolvare

Deoarece componentul are o rată de defectare constantă,

$$R(t) = e^{-\lambda t}$$

Înlocuind β=1 în ecuaţia (9.39) se obţine:

$$C_w = \frac{r\lambda}{i}\left[e^{-iw}(e^{iw} - 1)\right]$$

Fie w=1. Atunci

$$C_1 = \frac{24 \times 0{,}5}{0{,}08}\left[1 - e^{-0{,}08 \times 1}\right] = 11{,}53 \quad RON$$

Costul garanţiei nelimitate este obţinut prin

$$C_\infty = \frac{r\lambda}{i} = \frac{24 \times 0{,}5}{0{,}08} = 150 \quad RON.$$

Strategia de garanţie liberă în caz de defectare este folosită în mod obişnuit pentru produsele reparabile. În cazul acestei politici, producătorul este de acord să plătească costul reparaţiilor pentru toate defectările care au loc în timpul perioadei de garanţie. Mai întâi se va prezenta un model general de garanţie care estimează costul aşteptat al garanţiei pe produs pentru o perioadă de garanţie *w*, atunci când distribuţia timpilor de defectare este arbitrară şi costul reparaţiei depinde de numărul de reparaţii realizate. Apoi, se vor dezvolta modele pentru diferite strategii/politici de reparaţii.

9.3.2. MODELE DE GARANŢIE PENTRU O MĂRIME A LOTULUI FIXATĂ. DISTRIBUŢIA ARBITRARĂ A TIMPILOR DE DEFECTARE

Când un produs se defectează, el este repus în funcţiune prin reparaţie. Acest model ia în considerare cazul în care distribuţia timpilor de defectare este arbitrară. Pentru a simplifica analiza, se presupune că timpul de reparaţie este neglijabil. În plus faţă de notaţiile anterioare din acest capitol, se definesc următoarele:

S_n= timpul total până la a *n*-a defectare,
$f^{(n)}(t)$ = *f.d.p.* -ul lui S_n,
$F^{(n)}(t)$ = funcţia de distribuţie cumulativă a lui S_n,
$N(t)$ = numărul de defectări în intervalul $[0, t]$,
$M(t)$ = numărul aşteptat de defectări în $[0, t]$, (funcţia de înnoire),
c_i = costul aşteptat al celei de-a *i*-a reparaţie,
C_w = costul aşteptat al garanţiei pe produs pentru perioada *w*,
C_n = costul dat al garanţiei când sunt exact *n* defectări în intervalul $[0,w]$,

Scanned with OKEN Scanner

$$C_n = \sum_{i=1}^{n} c_i$$

$\sigma^2(w)$ = variația costului garanției per produs pentru perioada w,
L = numărul total de produse vândute.

Costul așteptat al garanției pe produs este:

$$C_w = \sum_{n=1}^{\infty} C_n P[N(w) = n] \tag{9.41}$$

unde $P[N(w)=n]$ este probabilitatea de a avea n defectări în timpul perioadei de garanție $[0,w]$. Deci,

$$P[N(t) = n] = F^{(n)}(t) - F^{(n+1)}(t) \tag{9.42}$$

cu $F^{(0)}(t) = 1$. Înlocuind ecuația(9.42) în (9.41), se obține:

$$C_w = \sum_{n=0}^{\infty} C_n F^{(n)}(w) \tag{9.43}$$

Costul total al garanției este egal cu LC_w. Analog, $\sigma^2(w)$ este :

$$\sigma^2(w) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 P[N(w) = n] - [C_w]^2$$

sau

$$\sigma^2(w) = \sum_{n=1}^{\infty} [C_n^2 - C_{n-1}^2] F^{(n)}(w) - [C_w]^2 \tag{9.44}$$

Numărul așteptat de defectări în timpul perioadei de garanție este:

$$M(w) = \sum_{n=0}^{\infty} nP[N(w) = n]$$

Folosind ecuația(9.42), se va rescrie $M(w)$ ca:

$$M(w) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)}(w) \tag{9.45}$$

care este definiția funcției de reînnoire.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă costul de reparare este independent de numărul de unități defectate $C_n=C$, atunci costul reparației în timpul perioadei de garanție este:

$$C_w = CM(w)$$

și variația costului garanției pe produs devine:

$$\sigma^2(w) = C^2 Var[N(w)]$$

unde

$$Var[N(w)] = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 [F^{(n)}(w) - F^{(n+1)}(w)]$$

sau

$$Var[N(w)] = \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) F^{(n)}(w) - [M(w)]^2$$

Variația pentru costul total al garanției este $L^2\sigma^2(w)$.

În subcapitolul următor se vor lua în considerare trei stagii de reparare diferite: metoda de reparație minimă, metoda de reparație *ca și cum ar fi nou* și o combinație între acestea două. Se vor folosi indicii 1 și 2 pentru referiri la prima, respectiv, a doua metodă.

9.3.3. MODELE DE GARANȚIE PENTRU UN LOT DE MĂRIME FIXĂ. METODA REPARAȚIEI MINIME

Utilizând această metodă, când un obiect se defectează, este reparat și repus în funcțiune la o aceeași rată de defectare ca și cea pe care o prezenta la timpul defectării. Acesta este cazul reparării componentelor sistemelor de mare anvergură și complexitate. Evident, repararea unuia sau mai multor componente nu va afecta rata totală de defectare a sistemului știind că vechimea celorlalte componente va face ca rata de defectare a sistemului să rămână neschimbată.

Modelul poate fi caracterizat printr-un proces de enumerare $\{N(t),\ t\geq 0\}$ și probabilitatea de a avea exact o defecțiune în intervalul $[t,\ t+dt]$ este $h(t)dt$. Acesta este un proces Poisson neomogen deoarece rata de defectare nu se schimbă cu timpul, și :

$$M_1(w) = \int_0^w h(t)dt = -\ln F(w) \tag{9.46}$$

și

$$P[N_1(w) = n] = \frac{[M_1(w)]^n e^{-M_1(w)}}{n!} \tag{9.47}$$

Scanned with OKEN Scanner

Folosind ecuațiile(9.45) şi (9.46), se arată că $F_1^{(1)}(w) = F(w)$ şi

$$F_1^{(n)}(w) = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{[M_1(w)]^i e^{-M_1(w)}}{i!} \qquad n > 1 \tag{9.48}$$

9.3.4. MODELE DE GARANŢIE PENTRU UN LOT DE MĂRIME FIXĂ. METODA DE REPARARE *CA ŞI CUM AR FI NOU*

Acest gen de reparaţie se desfăşoară de obicei pentru produse simple, unde produsul este complet revizuit după o defectare. Se presupune că reparaţia va aduce produsul în condiţia de *nou* - adică rata de defectare după reparaţie este semnificativ mai mică decât rata de defectare la timpul defectării. Spre deosebire de metoda de reparaţie minimă, metoda de reparare *ca şi cum ar fi nou* este un proces de reînnoire $\{N_2(t),\ t \geq 0\}$. Deci,

$$F_2^{(1)}(w) = F(w)$$

$$F_2^{(n)}(w) = \int_0^w F_2^{(n-1)}(w-t) f(t)dt \quad , \quad n > 1 \tag{9.49}$$

şi $M_2(w)$ este dat de funcţia standard de reînnoire :

$$M_2(w) = F(w) + \int_0^w M_2(w-t) f(t)dt \tag{9.50}$$

Valorile lui $M_2(w)$ şi $F_2^{(n)}(w)$ pot fi obţinute în mod analitic pentru distribuţiile exponenţială combinată şi Erlang. Valorile lor, pentru o distribuţie generală a defectărilor în timp, pot fi obţinute prin metode numerice.

EXEMPLUL 9.9

Timpul defectării unui produs urmăreşte o distribuţie de tip Erlang cu "k" etape şi funcţia sa de distribuţie cumulativă este dată de:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!}$$

Se presupune: $\lambda = 2$ defectări pe an, costul reparaţiei $C_n = n$, $w = 0,5$ şi 2 ani. Care este costul total al garanţiei pentru un lot de mărime fixă de 1000 produse adoptând una dintre cele două tipuri de reparaţie (reparaţie minimă şi reparaţie "ca şi cum ar fi nou")?

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare

Pentru k = 2, funcția de distribuție cumulativă a distribuției Erlang devine:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}(1+\lambda t)$$

Se obține numărul de defectări așteptat în timpul perioadei de garanție, pentru metoda cu reparație minimă, folosind ecuația (9.46):

$$M_1(t) = \lambda t - \ln(1+\lambda t)$$

Pentru w = 0,5 ani,

$$M_1(0,5) = 1 - \ln 2 = 0,307$$

Folosind $F_1^{(1)}(w) = F(w)$ *și ec. (9.48), se obține următoarea* $F_1^{(n)}(0,5)$ *pentru diferite valori ale lui n:*

$$F_1^{(1)}(0,5) = 1 - 2e^{-1} = 0,2642$$

$$F_1^{(2)}(0,5) = 1 - [e^{-0,307} + (0,307)e^{-0,307}] = 0,0385$$

$$F_1^{(3)}(0,5) = 1 - \left[e^{-0,307} + 0,307e^{-0,307} + \frac{(0,307)^2}{2!}e^{-0,307}\right] = 0,0038$$

$$F_1^{(4)}(0,5) = 0,000252$$

Ordine mai mari ale lui $F_1^{(n)}(0,5)$ *se vor apropia rapid de zero. Fără vreo diminuare prea mare a preciziei, se poate opri calculul la* $F_1^{(4)}(w)$*:*

$$C_{0,5} = \sum_{n=0}^{\infty} nF_1^{(n)}(0,5)$$

$$C_{0,5} = 0,353$$

Costul total al garanției pentru w = 0,5 ani este 0,353 X 1000 = 353 RON. Analog, pentru w = 2 se obține:

$$M_1(2) = 4 - \ln 5 = 2,39$$

și

$$C_2 = 5.264 \text{ RON}$$

Costul total al garanției pentru w = 2 este $C_2 = 5264$ *RON.*

Pentru metoda de reparație "bun ca nou" funcția cumulativă de distribuție în cazul Erlang este:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}(1+\lambda t)$$

și $F_2^{(n)}(t)$ *și* $M_2(t)$ *sunt date după cum urmează:*

$$F_2^{(1)}(t) = F(t)$$

$$F_2^{(n)}(t) = 1 - e^{-\lambda t}\sum_{i=0}^{nk-1}\frac{(\lambda t)^i}{i!}$$

$$M_2(t) = \frac{\lambda t}{k} + \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k-1}\frac{\theta^j}{1-\theta^j}[1 - \exp[-\lambda t(1-\theta^j)]]$$

unde $\theta = \exp(2\pi i/k)$ *este rădăcina de indice k din unitate.*

Pentru k = 2, w = 0,5 şi λ = 2 defectări pe an,

$F(t) = 1-e^{-\lambda t}(1+\lambda t)$

$M_2(t) = [2\lambda t-1+e^{-2\lambda t}]/4$

Deci,

$$F_2^{(1)}(0,5) = 0,2462$$

$$F_2^{(2)}(0,5) = 1-e^{-1,0}\left[\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}\right] = 0,018988$$

$$F_2^{(3)}(0,5) = 1-e^{-1,0}\left[\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}\right] = 0,0006216$$

Valori mai înalte ale $F_2^{(n)}(w)$ se vor apropia rapid de zero, iar costul garanţiei pe produs la w = 0,5, pentru metoda de reparare „bun ca nou", este:

$$C_{0,5} = \sum_{n=1}^{\infty} nF_2^{(n)}(0,5) = 0,30404$$

Pentru un lot de 1000 unităţi costul total al garanţiei este de 304,04 RON. Numărul aşteptat de defectări în timpul perioadei de garanţie este:

$$M_2(0,5) = [2\times 1-1+e^{-2}]/4 = 0,284$$

Analog, costul garanţiei per produs pentru w=2 ani este:

$$C_2 = \sum_{n=1}^{\infty} nF_2^{(n)}(2) = 2,93686$$

Costul total al garanţiei pentru un lot de 1000 produse este de 2.937 RON.

Este evident că, costul aşteptat al garanţiei pentru metoda de reparaţie minimă este întotdeauna mai mare decât costul metodei de reparare *bun ca nou*. Acest lucru este de aşteptat deoarece produsul are o distribuţie crescătoare a ratei de defectare, atunci când este folosită metoda reparaţiei minime. Mai mult decât atât, rata de creştere a costului garanţiei, pe măsură ce durata perioadei de garanţie se măreşte, este semnificativ mai mare pentru metoda de reparaţie minimă, atunci când este comparată cu rata creşterii pentru metoda *bun ca nou*.

9.3.5. MODELE DE GARANŢIE PENTRU LOTURI DE MĂRIME FIXĂ. METODA DE REPARARE COMBINATĂ

Se va lua în considerare cazul în care o reparaţie, minimă sau de tipul *bun ca nou*, depinde de tipul defecţiunii produsului. De exemplu, există multe componente în sistemele mari – ca de exemplu componentele modulare electronice – care trebuie sa fie înlocuite cu alte componente noi, la defectare. În alte cazuri, există alte componente care necesită reparaţii minime, după cădere. Într-adevăr, acest tip de componente sunt cele banale. În alte situaţii, acelaşi componente, în funcţie de

Scanned with OKEN Scanner

vechimea în funcționare, pot necesita reparații minime sau o înlocuire cu un component nou. În acest subcapitol se va discuta ultima din aceste două situații presupunându-se că un component poate avea două tipuri de defecțiuni: tipul 1 necesită o reparație tip *bun ca nou* și tipul 2 necesită o reparație minimă. Un produs de vechime t are o defecțiune de tipul 1 cu probabilitatea $p(t)$ și de tipul 2 cu probabilitatea 1- $p(t)$. Se vor propune expresiile pentru numărul așteptat de defecțiuni, pentru fiecare tip în parte.

Deoarece rata defectărilor după o reparație minimă rămâne neschimbată, și știind că pentru o vechime t probabilitatea unei reparații a defecțiunii de tip *bun ca nou* este $p(t)$, se poate defini o rată a reparațiilor de tip *bun ca nou* a produsului ca: $p(t)h(t)$.

După reparație, produsul continuă să funcționeze până la o nouă defectare. Procesul este repetat și intervalele dintre reparațiile tip *bun ca nou* sunt independente și identic distribuite cu funcția de distribuție $\Re(t)$ dată de /9/ :

$$\Re(t) = 1 - e^{-\int_0 p(x)h(x)dx} \tag{9.51}$$

și

$$\Re'(t) = p(t)h(t)\overline{\Re}(t)$$

unde:

$$\overline{\Re}(t) = 1 - \Re(t)$$

Secvența de reparații *bun ca nou* este un proces de reînnoire a cărui număr așteptat de reparații din timpul perioadei de garanție $[0,w]$ este $M_1(w)$:

$$M_1(w) = \Re(w) + \int_0^w M_1(w-t)d\Re(t) \tag{9.52}$$

Numărul așteptat de reparații minime la timpul t dat fiind faptul că vechimea produsului este x poate fi exprimat ca:

$$m_2(x) = \overline{p}(x)h(x) \tag{9.53}$$

Folosind funcția de distribuție a lui x, se rescrie ecuația (9.53) ca:

$$m_2(t) = \overline{p}(t)h(t)\overline{\Re}(t) + \int \overline{p}(x)h(x)\overline{\Re}(x)dM_1(t-x) \tag{9.54}$$

Numărul așteptat de reparații minime în timpul perioadei de garanție $[0, w]$ este obținut prin integrarea ecuației (9.54) în relație cu t pe durata perioadei de garanție – adică:

Scanned with OKEN Scanner

$$M_2(w) = \int_0^w m_2(t)dt$$

sau

$$M_2(w) = \int_0^w [1 + M_1(w-t)h(t)\overline{\Re}(t)dt - M_1(w)] \tag{9.55}$$

Acum se va putea determina numărul aşteptat de reparaţii din timpul garanţiei prin adunarea numărului aşteptat din fiecare tip de reparaţie:

$$M(w)=M_1(w)+ M_2(w)$$

Adunând ecuaţiile (9.52) şi (9.55) se obţine:

$$M(w) = \int_0^w [1 + M_1(w-t)h(t)\overline{\Re}(t)dt] \tag{9.56}$$

Presupunând că c_1 şi c_2 sunt costurile de reparaţie aşteptate pentru cele două metode de reparaţie, atunci:

$$\begin{aligned} C_w &= c_1 M_1(w) + c_2 M_2(w) \\ &= (c_1 - c_2)M_1(w) + c_2 \int_0^w [1 + M_1(w-t)]h(t)\overline{\Re}(t)dt \end{aligned} \tag{9.57}$$

Dacă $p(t)=1$ atunci avem de-a face cu metoda de reparare *bun ca nou*, iar când $p(t)=0$ metoda de reparare este cea minimă. De asemenea, dacă $p(t)$= constant = p, atunci $\overline{\Re}(t) = [\overline{F}(t)]^p$ şi ecuaţiile (9.56) şi (9.57) se reduc la:

$$M(w) = M_1(w) / p \tag{9.58}$$

$$C_w = (pc_1 + \overline{p}c_2)M_1(w) / p \tag{9.59}$$

În unele situaţii, o reparaţie poate duce la o creştere, la o descreştere, sau la o rată de defectare constantă a produsului. În astfel de situaţii se consideră reparaţia imperfectă – adică, distribuţia timpilor de defectare se schimbă după fiecare reparaţie şi distribuţia timpului de defectare a acelui produs depinde de numărul de reparaţii realizate. Este posibil ca metoda de reparaţie combinată discutată să fie una imperfectă care să influenţeze costul garanţiei produsului. Deci, distribuţia timpului de defectare a celei de-a n-a defectări trebuie să fie modificat pentru a reflecta efectul reparaţiilor imperfecte, după cum urmează.

Scanned with OKEN Scanner

Așa cum a fost prezentat mai devreme, $F^{(n)}(t)$ și $f^{(n)}(t)$ sunt funcțiile de distribuție a timpului de defectare și de densitate a acestuia, pentru defectarea cu numărul n:

$$F^{(1)}(w) = F(w)$$
$$F^{(n)}(w) = \int_0^w F^{(n-1)}(w-t) f_n(t) dt \quad \text{pentru } n > 1 \tag{9.60}$$

Se consideră situația în care distribuțiile timpului de defectare sunt exponențiale cu diferite mărimi – adică, $F(t) = 1 - e^{-\lambda_i t}$ cu $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 ...$, indicând o scădere a timpului mediu până la defectare. Prin transformata Laplace a ecuației (9.60) și rezolvarea ei, se obține:

$$F^{(1)}(w) = 1 - e^{-\lambda_1 w} \tag{9.61}$$

$$F^{(n)}(w) = \sum_{i=1}^{n} \left[\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda_i} \right) \right] [1 - e^{-\lambda_i w}] \tag{9.62}$$

Odată ce este obținut $F^{(n)}(w)$, se poate calcula cu ușurință costul total al garanției utilizând ecuația (9.43).

EXEMPLUL 9.10

Un producător dorește să estimeze costul garanției pentru 2000 de produse. Se presupune că după fiecare reparație, scade timpul mediu până la defectarea următoare. Datele colectate de pe teren arată că funcția de distribuție a timpului de defectare este exponențială cu diferite valori medii, adică $F_i(t) = 1 - e^{-\lambda i t}$ *cu* $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < ... < \lambda_w$, *unde* λ_i *este rata de defectare a defectării de indice „i" și* λ_w *este rata de defectare a ultimei defectării înaintea expirării perioadei de garanție „w". Producătorul dorește să extindă garanția la 2 ani. Ratele de defectare ale primelor 5 defecțiuni sunt 0,5; 0,8; 1; 1,2 și 3 defectări pe an. Costurile de reparare corespunzătoare sunt 20, 19, 18, 18 și 18 RON. Să se determine costul total al garanției.*

Rezolvare

Deoarece $F_i(t) = 1 - e^{-\lambda i t}$ *cu* $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < ...$, *prin aplicarea transformatei Laplace a următoarei expresii:*

$$F^{(n)}(w) = \int_0^w F^{(n-1)}(w-t) f_n(t) dt \quad \text{pentru } n > 1$$

se obține

Scanned with OKEN Scanner

$F^{(1)}(t)=1-e^{-\lambda 1 t}$ şi

$$F^{(n)}(w)=\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_j-\lambda_i}\right)\right][1-e^{-\lambda_i w}]$$

$\lambda_1=0,5$ *defectări pe an;* $\lambda_2=0,8$ *defectări pe an;* $\lambda_3=1$ *defectări pe an,*
$\lambda_4=1,2$ *defectări pe an;* $\lambda_5=3$ *defectări pe an;* $w=2$ *ani,*

$F^{(1)}(2)=0,6321$ $F^{(2)}(2)=0,3554$

$F^{(3)}(2)=1,2869$ $F^{(4)}(2)=2,9383$

$F^{(5)}(2)=5,8716$

$$C_w=\sum_{n=0}^{\infty}C_n F^{(n)}(w)$$

$C_w=201\,RON.$

Producătorii, de obicei, monitorizează noile produse pentru a se asigura că acestea, atunci când sunt achiziţionate de client, vor supravieţui *mortalităţii infantile* sau domeniului cu o rată de defectare descrescătoare. Astfel, numărul de reparaţii şi costul garanţiei în timpul perioadei iniţiale de proprietate a clientului asupra produsului sunt minimizate. Totuşi, este dificil să se asigure că toate produsele scoase pe piaţă au supravieţuit perioadei cu o astfel de rată a defectării, dar nu imposibil de realizat. Mai mult decât atât, majoritatea perioadelor de garanţie pentru produsele nereparabile sunt scurte, mai scurte decât perioada de atingere a *mortalităţii infantile.*

De aceea, producătorii pun accentul mai mult pe costul garanţiei din timpul perioadei cu o rată descrescătoare a defectărilor.

Distribuţia Weibull este adesea folosită pentru a servi drept model timpilor de defectare din această zonă. Totuşi, acesta nu este un model analitic uşor de utilizat.

Cercetările în domeniu /9/ au arătat că o distribuţie a defectărilor dintr-o combinaţie a două sau mai multe densităţi exponenţiale ar conduce la obţinerea caracteristicilor dorite ale ratelor de cădere. În exemplul următor se arată modul de estimare al costul garanţiei în timpul perioadei cu o rată a defectărilor descrescătoare printr - o combinaţie a densităţilor exponenţiale.

EXEMPLUL 9.11

Distribuţia defectărilor unui produs constă într-o combinaţie a celor două densităţi exponenţiale care prezintă caracteristicile dorite. Acest lucru poate fi interpretat ca o având o combinaţie a celor două tipuri de unităţi – o proporţie „p" a defectărilor cu

Scanned with OKEN Scanner

rata de defectare înaltă λ_1 şi a proporţiei „1-p" de unităţi „normale" cu o rată de defectare scăzută λ_2. F.d.p. -ul modelului este:

$$f(t) = p\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + (1-p)\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}$$

1. Să se arate că rata de defectare este monoton descrescătoare în raport cu „t".
2. Fie $\lambda_1 = 4$ defectări/an, $\lambda_2 = 2$ defectări/an, costul/reparaţie de 100 RON şi p=0,4. Să se determine costul garanţiei pe o perioadă de 5 ani.

Rezolvare

1.Produsul are o rată de defectare combinată cu:

$$f(t) = p\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + (1-p)\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}$$

$$F(t) = 1 - pe^{-\lambda_1 t} - (1-p)e^{-\lambda_2 t}$$

şi

$$R(t) = pe^{-\lambda_1 t} + (1-p)e^{-\lambda_2 t}$$

Rata defectării este:

$$h(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)} = \frac{p\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + (1-p)\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}}{pe^{-\lambda_1 t} + (1-p)e^{-\lambda_2 t}}$$

La $t = 0$, $h(0) = p\lambda_1 + (1\text{-}p)\lambda_2$ şi:

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{-(\lambda_1 - \lambda_2)^2 p(1-p)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}}{[pe^{-\lambda_1 t} + (1-p)e^{-\lambda_2 t}]^2} < 0$$

Prin urmare, h(t) este monotonă, descrescătoare cu t.
2.Pentru a se determina costul garanţiei pe 5 ani, se va determina mai întâi numărul aşteptat de defectări în timpul perioadei de garanţiei după cum urmează. Transformata Laplace a funcţiei de densitate este:

$f^*(s)=[p\lambda_1/(\lambda_1+s)]+[(1\text{-}p)\lambda_2/(\lambda_2+s)]$

Transformata Laplace a funcţiei de reînnoire este:

$$M(s) = \frac{f^*(s)}{s[1-f^*(s)]}$$

$$M(s) = \frac{\lambda_1\lambda_2 + s[p\lambda_1 + (1-p)\lambda_2]}{s^2\{s + [(1-p)\lambda_1 + p\lambda_2]\}}$$

Se definesc :

$$\Lambda_1 = p\lambda_1 + (1-p)\lambda_2, \quad \Lambda_2 = (1-p)\lambda_1 + p\lambda_2 = (\lambda_1 + \lambda_2) - \Lambda_1$$

Luând transformata inversă a lui M(s), se obţine:

$$M(t) = ([\Lambda_1\Lambda_2 - \lambda_1\lambda_2]/\Lambda_2^2)[1 - e^{-\Lambda_2 t}] + (\lambda_1\lambda_2/\Lambda_2)t$$

Înlocuind λ_1=4, λ_2=2, p=0,4 şi t=5 în expresia de mai sus, se obţine:

Scanned with OKEN Scanner

$\Lambda_1 = 2{,}8$, $\Lambda_2 = 3{,}2$ *şi*

$M(5) = ([8{,}98 - 8]/3{,}2^2)[0{,}9999998875] + 12{,}5$

$M(5) = 12{,}5937$

Costul aşteptat al garanţiei este: 100 x *M(5) = 1259,37 RON.*

9.4. DREPTURI DE GARANŢIE

În capitolele anterioare au fost prezentate diferite strategii şi metode pentru determinarea lungimii perioadei de garanţie, costul garanţiei pe unitate şi fondul de rezervă pentru garanţie pe care producătorul ar trebui să-l aloce pentru a acoperi drepturile de garanţie pe timpul de service acordat produsului. Este mai benefic pentru producător să aloce costul de garanţie în funcţie de vârsta/durata de viaţă produselor, de numărul de cereri/drepturi aferente oricărui timp şi de numărul de produse aflate în service la timpul respectiv. Prin urmare, analiza continuă a informaţiilor date provenite din cererile/revendicările de garanţie va ajuta producătorul să evalueze cu mai mare acurateţe drepturile de garanţie viitoare şi să compare ratele de cerinţe şi costurile pentru diferite linii de producţie, pentru diferite componente ale produsului şi pentru unităţi ale aceluiaşi produs dar care este fabricat în perioade diferite de timp. Această analiză continuă a datelor privind drepturile de garanţie poate, de asemenea, ajuta producătorul să evalueze performanţele produsului/producţiei, care trebuie să fie, pe cât posibil, cât mai aproape de nivelul mondial.

Acest capitol pune în discuţie metode pentru analizarea cerinţelor/drepturilor de garanţie în scopul estimării numărul aşteptat de cereri pe unitatea aflată în service funcţie de timpul de service acordat. În plus, sunt prezentate de asemenea şi estimările numărului şi costului cererilor pentru toate unităţile aflate în service şi erorile standard ale acestor estimări.

Mai întâi, este necesar a se calcula numărul de revendicări/reclamaţii la timpul t. Se presupune că unităţile sunt vândute consumatorilor în ziua x ($0 \leq x \leq \tau$). Numărul de revendicări/cereri pentru o unitate la t zile mai târziu se presupune a respecta modelul Poisson, cu media λ_t ($t=0,1...$). Deoarece numărul aşteptat de cereri λ_t este mic pentru majoritatea situaţiilor, λ_t poate fi interpretat ca fiind probabilitatea unei cereri la vechimea t. Estimarea costului cererilor necesită ca orice cerere să fie imediat consemnată în baza de date pentru cereri şi să fie folosită în analiză. Totuşi, cererile de reparaţie sunt consemnate folosind una sau mai multe dintre procedurile următoare: (1) cererile sunt consemnate imediat ce au apărut, (2) cererile sunt consemnate individual după o întârziere de timp l şi (3) cererile se acumulează şi sunt consemnate în grup, mai târziu.

Se presupune că N_x produse identice sunt vândute în ziua x. Cererile de reparare sunt consemnate după un interval de timp de întârziere l. Se definesc N_{xtl} ca

Scanned with OKEN Scanner

fiind numărul de cereri pentru produsele vândute în ziua x, având vechimea/vârsta t şi timpul de întârziere în consemnarea cererilor de reparare l. Distribuţia lui N_{xtl} este una de tip Poisson cu media $\mu_{xtl} = N_x \lambda_t f_l$, unde f_l este probabilitatea ca cererea pentru reparaţie să intre în baza de date după un timp de întârziere l. Numărul de cereri aşteptat pentru un produs până la şi incluzând timpul t este :

$$\Lambda_t = \sum_{u=0}^{t} \lambda_u .$$

Astfel, numărul mediu de cereri la timpul t pentru produsele vândute (sau cărora li se acordă service) în timpul unei perioade $(0, \tau)$ este:

$$m(t) = \frac{\sum_{x=0}^{\tau} \sum_{l=0}^{\infty} N_{xtl}}{\sum_{x=0}^{\tau} N_x} \qquad t = 0,1, \ldots \qquad (9.63)$$

şi

$$M(t) = \sum_{u=0}^{t} m(u) \qquad (9.64)$$

Se presupune că datele sunt valabile pentru timpul calendaristic de la 0 la T. Toate cererile care au intrat in baza de date până la T sunt incluse în analiză şi vor fi observate numărul de cereri N_{xtl} pentru x, t, l astfel încât $0 < x+t+l \leq T$. Acest lucru face ca estimarea lui $m(t)$ şi $M(t)$ să devină o problemă de anticipare care necesită predicţia datelor pentru N_{xtl}. Odată ce $m(t)$ şi $M(t)$ sunt estimate, poate fi făcută cu uşurinţă o estimare a costului cererilor de garanţie. În următoarele subcapitole, vor fi prezentate două modele de estimare a numărului şi costului cererilor de garanţie.

Primul model are în vedere presupunerea că sunt cunoscute probabilităţile timpului l până la consemnarea/raportarea cererilor în baza de date. Al doilea model ia în considerare cazul în care cererile intră în grup în baza de date.

9.4.1. CERERI DE GARANŢIE CONSEMNATE ÎNTÂRZIAT FAŢĂ DE MOMENTUL SEMNALĂRII

Se presupune că probabilitatea consemnării unei cereri de garanţie în baza de date la un interval de timp l de când a avut loc semnalarea cererii, f_l , este cunoscută.

Fie $F_l = f_0 + f_1 + \ldots + f_l$. Mai mult decât atât, numărul de produse (unităţi identice) vândute în ziua x, N_x este cunoscut pentru $x=0, 1\ldots, T$, unde T este data curentă.

Scanned with OKEN Scanner

Astfel funcţia de verosimilitate pentru frecvenţa cererilor N_{xtl} este:

$$L = \prod_{x+}\prod_{t+}\prod_{l\le T} \frac{(N_x \lambda_t f_l)^{N_{xtl}} e^{-N_x \lambda_t f_l}}{N_{xtl}!} \tag{9.65}$$

Estimatorii de verosimilitate maximă obţinuţi din ecuaţia(9.65) sunt:

$$\hat{\lambda}_t = \frac{N_e(t)}{R_{T-t}} \qquad t = 0, 1,...,T \tag{9.66}$$

unde:

$$N_e(t) = \sum_{x+l\le T-t}\sum N_{xtl} \tag{9.67}$$

este numărul total de cereri care au avut loc la timpul (sau vechimea) t şi:

$$R_{T-t} = \sum_{x=0}^{T-t} N_x F_{T-t-x} \tag{9.68}$$

este un calcul ajustat a numărului de produse în stare de risc la timpul t. Numărul de produse (unităţi) vândute în ziua x este modificat de probabilitatea ca pentru un produs din în acest grup, o cerere la timpul/vechimea t să fie raportată la timpul T. Cu alte cuvinte, pentru a lua în considerare şi cererile care au avut loc înainte de T şi nu au fost incluse în analiză la timpul T, vom înmulţi N_x cu o probabiliatate corespunzătoare de semnalare a cererii înainte de T. Numărul mediu de cereri la timpul t pentru produsele aflate în service este:

$$\hat{m}(t) = \hat{\lambda}_t \tag{9.69}$$

şi

$$\hat{M}(t) = \sum_{u=0}^{t} \hat{\lambda}_u = \hat{\Lambda}_t \tag{9.70}$$

Este important să se observe că dacă este ignorat intervalul de timp l sau dacă, consemnarea cererilor în baza de date este instantanee, atunci estimările lui $\hat{m}(t)$ şi $\hat{M}(t)$ sunt obţinute cu toate valorile lui F_l $(l=0,1...)$ egale cu 1. În plus, R_{T-t} este, de fapt, numărul total de produse vândute care au o vechime/vârstă cel puţin egală cu t la timpul T. Evident, dacă există un interval l şi dacă este ignorat intenţionat în analiză,

Scanned with OKEN Scanner

atunci estimările lui λ_t au o deplasare descrescătoare, ducând la erori grave în evaluările numărului de cereri.

Este foarte important de asemenea să se observe că vechimea/vârsta adevărată a unui produs la timpul t este mai mare decât t, deoarece produsele, în majoritatea cazurilor, sunt depozitate temporar până ce sunt vândute. Deşi produsele nu sunt folosite în timp ce se află în depozit, sunt afectate ratele lor de defectare. Cu cât este mai mare perioada de depozitare cu atât este mai mare numărul cererilor în timpul perioadei de garanție deoarece aceasta începe din momentul în care produsul este vândut, neavând importanță vârsta sa la momentul respectiv. În acest caz, producătorii pot micşora numărul cererilor fie prin modificarea producției, astfel încât să fie minimizat inventarul total/stocul şi costul cererilor, fie prin reproiectarea produsului pentru a-i reduce semnificativ rata de defectare.

Costul total al cererilor de garanție poate fi estimat prin înmulțirea numărului mediu de cereri la timpul t, $M(t)$, cu costul mediu al unei cereri. Poate fi estimat, de asemenea, prin gruparea cererilor în funcție de cost după cum urmează: dacă costurile cererilor sunt indexate cu $c=1,2...,m$ şi $k(c)$ este costul unei cereri din grupul c, dacă $\lambda_t^{(c)}$ este numărul aşteptat de cereri de cost $k(c)$ pentru un produs de vechime t, şi dacă $N_{xtl}^{(c)}$ este funcția Poisson $(N_x\lambda_t^{(c)}f_l)$ independentă de x, t şi l, prin derivarea ecuației (9.66) se obține:

$$\lambda_t^{(c)} = N_e^{(c)}(t)/R_{T-t} \tag{9.71}$$

Analog, $m^{(c)}(t)$ şi $M^{(c)}(t)$ sunt extensiile naturale ale ecuațiilor (9.69) şi (9.70) reprezentând numărul mediu de cereri de cost $k(c)$ la vechimea pentru produse vândute în afara perioadei $0,1...\tau$. Costul mediu al tuturor cererilor de până la vechimea t pentru toate produsele vândute în perioada $t=0,1...,\ \tau$ este:

$$K(t) = \sum_{c=1}^{m} k(c)M^{(c)}(t) \tag{9.72}$$

9.4.2. CERERI DE GARAMȚIE PENTRU DATE GRUPATE

În acest capitol se vor estima cererile totale pentru garanție atunci când acestea sunt grupate pe baza vârstei produsului. De exemplu, se presupune că ştim numărul total al cererilor pentru toate produsele ale căror vechimi/vârste se află în intervale de timp t_1 şi t_2, t_2+1 şi t_3 şi aşa mai departe. Toate cererile pentru produsele ale căror vechimi se află într-un interval sunt raportate ca un grup la timpul de defectare t, adică, toate produsele din grup au acelaşi întârziere până la consemnarea cererii. Încă o dată, se presupune că distribuția timpului de întârziere f_l este cunoscută.

Scanned with OKEN Scanner

Se consideră un interval închis de vechime $t=[a, b]$. Numărul mediu de cereri pe produs pe acest interval de vechime este:

$$M(a,b)=\sum_{t=a}^{b}\lambda_t \tag{9.73}$$

Utilizând ecuaţiile (9.66) şi (9.73), se va estima numărul mediu de cereri pe produs pentru intervalul de vârstă $[a, b]$ astfel:

$$\sum_{t=a}^{b}\hat{\lambda}_t=\sum_{t=a}^{b}\frac{N_e(t)}{R_{T-t}} \tag{9.74}$$

Dacă avem numărul total de cereri care s-au făcut în timpul intervalului $[a, b]$-adică, dacă doar pe $\sum_{t=a}^{b}N_e(t)$, atunci se poate aproxima ec. (9.74) cu:

$$M(a,b)=\frac{\sum_{t=a}^{b}N_e(t)}{R(a,b)} \tag{9.75}$$

unde $M(a, b)$ este o aproximare a lui $M(a, b)$ real şi $R(a, b)$ este o estimare a zilelor de service ale produsului. O aproximare a lui $R(a, b)$ poate fi obţinută astfel:

$$R(a,b)=\frac{1}{2}(R_{T-a}+R_{T-b}) \tag{9.76}$$

sau

$$R(a,b)=\frac{1}{b-a+1}\sum_{t=a}^{b}R_{T-t} \tag{9.77}$$

Costul aşteptat al cererilor de garanţie C_{total} este:

$$C_{total}=\bar{k}M(a,b)N_{a,b}$$

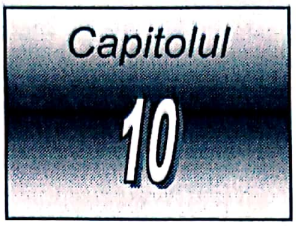
unde

$\bar{k}$ =costul mediu pe cerere,

$N_{a,b}$= numărul de produse ale căror vechime se află între a şi b inclusiv.

Aproximarea ecuaţiei (9.78) este cu atât mai precisă cu cât intervalul [a,b] este mai mic.

Scanned with OKEN Scanner



INSPECŢIA ŞI ÎNTREŢINEREA PREVENTIVĂ

Funcţionarea unui sistem este în mare măsură afectată de design-ul structural, de calitatea şi fiabilitatea componentelor şi de implementarea unui program efectiv de întreţinere preventivă şi de inspecţie. În capitolele anterioare s-au prezentat metodele utilizate în estimarea fiabilităţii diferitelor design-uri structurale cum ar fi cele tip serie, paralel, paralel - serie, serie - paralel, *k* din *n* şi reţele complexe. De asemenea, s-au prezentat metode pentru estimarea fiabilităţii componentelor utilizând testarea duratei lor de existenţă în condiţii de funcţionare normale şi accelerate. În acest capitol se vor prezenta modele optime de planuri de *inspecţie, întreţinere preventivă şi înlocuiri* (**IIPI**). Noţiunea de *optim* se referă la faptul că folosirea frecventă a **IIPI** duce la creşterea costurilor de întreţinere şi la reducerea costurilor determinate de întreruperea sistemului în cazul unei avarii, pe când utilizarea ocazională a programului **IIPI** are ca efect scăderea costurilor referitoare la întreţinere, însă duce concomitent la creşterea costurilor determinate de întreruperea funcţionării sistemului. Totuşi, în funcţie de tipul de distribuţie a timpilor de defectare, poate exista un program **IIPI** optim. Întreţinerea preventivă poate implica reparaţii minore, înlocuiri sau inspecţia componentelor. În unele sisteme, cum ar fi un microprocesor al unui regulator programabil, nu sunt posibile reparaţiile minore sau inspecţiile. În acelaşi timp există sisteme a căror stare nu poate determinată decât prin inspecţie sau testare. În acest caz, înlocuirea/utilizarea pieselor de schimb este singura alternativă posibilă.

Funcţia primară a întreţinerii preventive şi a inspecţiilor este aceea de control asupra stării echipamentului şi de asigurare a disponibilităţii sale de funcţionare. Pentru aceasta este necesară determinarea următoarelor aspecte:

Scanned with OKEN Scanner

- Frecvența întreținerii preventive, înlocuirilor și inspecțiilor;
- Regulile de înlocuire a componentelor;
- Efectul asupra modificării traseului tehnologic, în cazul luării deciziei de înlocuire;
- Mărimea echipei de întreținere;
- Nivelurile optime de inventariere a inspecțiilor/înlocuirilor;
- Stabilirea și respectarea regulilor pentru posturile de întreținere;
- Numărul și tipul mașinilor disponibile în cadrul procesului de întreținere.

Enumerarea de mai sus este o listă parțială a ceea ce constituie un sistem complet de întreținere preventivă, înlocuire și inspecție. Acest capitol include modele analitice ce corespund unora dintre elementele enumerării de mai sus. Mai exact, se vor prezenta abordări diferite asupra determinării frecvenței optime de efectuare a întreținerii preventive, înlocuirii și inspecției, la sisteme funcționând în condiții diferite. Vor fi dezbătute și metodele de determinare a nivelelor optime de realizare/achiziție a volumului de piese de schimb.

10.1. MODELE DE ÎNTREȚINERE PREVENTIVĂ ȘI ÎNLOCUIRE. MINIMALIZAREA COSTURILOR

Întreținerea preventivă și înlocuirile sunt acțiuni care se referă la efectuarea de reparații minore sau la înlocuirea integrală a unor componente ale sistemului sau chiar a întregului sistem. Înainte de a trece la prezentarea modelelor analitice pentru întreținerea preventivă și înlocuiri, trebuie menționat că majoritatea, dacă nu toate modelele întâlnite în literatura de specialitate, presupun următoarele :

- Costul total, care include o înlocuire după producerea avariei, este mai mare decât cel care include o acțiune de întreținere preventivă, fie ea o reparație sau o înlocuire. Cu alte cuvinte, costul reparației sistemului, după ce acesta a cedat, este mai mare decât costul întreținerii sistemului înaintea avarierii sale.
- Funcția ratei de defectare a sistemului crește monoton cu timpul. Desigur, dacă rata de avarie ar descreşte cu timpul, atunci probabil funcționarea sistemului s-ar îmbunătăți cu trecerea timpului, iar orice acțiune de întreținere preventivă sau înlocuire ar fi considerată o cheltuială inutilă. De asemenea, dacă echipamentul sau

Scanned with OKEN Scanner

sistemul ar avea o rata de avarie constantă, atunci orice acţiune de întreţinere preventivă ar fi o cheltuială inutilă. Aceasta se datorează faptului că atunci când rata de avarie este constantă, înlocuirea echipamentului înaintea avarierii sale nu afectează probabilitatea ca echipamentul să cedeze în viitorul apropiat, dat fiind faptul că la momentul respectiv funcţionarea sa este bună.

- Reparaţiile minore nu schimbă rata de defectare a sistemului. Chiar şi în cazul în care o componentă a unui sistem ar fi înlocuită cu o una nouă, complexitatea sistemului şi numărul mare de componente din cadrul acestuia vor face ca efectul unei asemenea înlocuiri să fie unul neglijabil sau inexistent.

În subcapitolele următoare vor fi analizate politicile comune privind întreţinerea preventivă şi înlocuirile.

10.1.1. POLITICA DE ÎNLOCUIRE LA INTERVALE CONSTANTE

Politica de înlocuire la intervale constante (**PIIC**) este cea mai simplă politică de întreţinere preventivă şi de înlocuire. Conform acestei politici, se desfăşoară două tipuri de acţiuni. Prima acţiune constă într-o înlocuire preventivă care are loc la intervale de timp determinate. Componente sau părţi de sistem sunt înlocuite la date prestabilite, indiferent de vârsta componentei sau a părţii care va fi înlocuită. A doua acţiune constă în înlocuirea după avariere, în cadrul căreia componentele sau părţile sunt înlocuite după ce au încetat să mai funcţioneze. Această politică este cunoscută şi sub denumirea de politica de înlocuire în bloc.

Aşa cum s-a menţionat anterior, obiectivul modelelor este acela de a determina parametrii politicii de întreţinere preventivă funcţie de anumite criterii. Cel mai folosit criteriu este costul total de înlocuire pe unitatea de timp. Acest lucru poate fi realizat prin calcularea funcţiei costului total prevăzut pe unitatea de timp după cum urmează.

Fie $c(t_p)$ costul total de înlocuire pe unitatea de timp, ca o funcţie a lui t_p. Astfel:

$$c(t_p) = \textit{costul total în intervalul } (0, t_p] \textit{ / mărimea intervalului} \qquad (10.1)$$

Costul total prevăzut în intervalul $(0, t_p]$ este dat de suma dintre costul prevăzut pentru înlocuirile de după avarie şi costul înlocuirilor preventive. În intervalul $(0, t_p]$ o înlocuire preventivă este operată la un cost c_p, iar înlocuirile după avarie $M(t_p)$ la un cost c_f, unde $M(t_p)$ reprezintă numărul prevăzut de înlocuiri în intervalul $(0, t_p]$. t_p reprezintă mărimea determinată a intervalului. Ecuaţia (10.1) poate fi rescrisă astfel:

Scanned with OKEN Scanner

$$c(t_p)=\frac{c_p+c_f M(t_p)}{t_p} \qquad (10.2)$$

Numărul prevăzut de avarii $M(t_p)$ în intervalul $(0, t_p]$ poate fi obţinut prin oricare dintre metodele prezentate în capitolele anterioare (v. Capitolul 8).

EXEMPLUL 10.1

O componentă critică a unui sistem complex cedează ori de câte ori mecanismul său de avarie intră într-una dintre cele două etape. Presupunând că mecanismul de avarie intră în prima fază cu o probabilitate θ, atunci va intra în etapa a doua cu probabilitatea 1-θ. Funcţiile densităţii de probabilitate ale timpului de avarie pentru prima şi a doua etapă sunt: $\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}$ şi respectiv $\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}$. Să se determine intervalul optim de înlocuire preventivă a componentei pentru diferite valori ale λ_1, λ_2 şi θ, dacă c_p=100 RON şi c_f = 300 RON.

Rezolvare

F.d.p. -ul timpului de defectare al componentei este:

$$f(t)=\theta\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}+(1-\theta)\lambda_2 e^{-\lambda_2 t} \qquad (10.3)$$

iar transformata Laplace este:

$$f^*(s)=\frac{\lambda_1\lambda_2+\theta\lambda_1 s+(1-\theta)\lambda_2 s}{(\lambda_1+s)(\lambda_2+s)} \qquad (10.4)$$

Ecuaţia de mai sus are ca rădăcini 0 şi s_1=[(1-θ)λ_1+$\theta\lambda_2$]. Extensia ecuaţiei transformatei Laplace la numărul aşteptat de căderi este :

$$M^*(s)=\frac{1}{s^2\mu}+\frac{1}{s}\frac{\sigma^2-\mu^2}{2\mu^2}-\frac{\theta(1-\theta)(\lambda_1-\lambda_2)^2}{[(1-\theta)\lambda_1+\theta\lambda_2]^2(s-s_1)} \qquad (10.5)$$

Numărul aşteptat de avarii la timpul t este obţinut prin inversarea ecuaţiei (10.5) astfel:

$$M(t)=\frac{t}{\mu}+\frac{\sigma^2-\mu^2}{2\mu^2}-\frac{\theta(1-\theta)(\lambda_1-\lambda_2)^2}{[(1-\theta)\lambda_1+\theta\lambda_2]^2}e^{-[(1-\theta)\lambda_1+\theta\lambda_2]t} \qquad (10.6)$$

unde μ şi σ^2 sunt:

Scanned with OKEN Scanner

$$\mu = E(t) = \int_0^{\infty} t f(t) dt$$

$$\sigma^2 = E(t^2) - [E(t)]^2$$

Chiar fără a rezolva acest exemplu cu date determinate este evident faptul că atunci când $\lambda_1=\lambda_2$, componenta are o rată constantă de defectare. De aceea, soluția optimă este înlocuirea componentei după defectare.

EXEMPLUL 10.2

Un lagăr de alunecare al unui arbore funcționând la turații ridicate se uzează corespunzător unei distribuții normale cu media de 1.000.000 de cicluri și o abaterea standard de 100.000 de cicluri. Costul unei înlocuiri preventive este de 50 RON, iar acela al unei înlocuiri în urma unei avarii este 100 RON. Dacă se presupune că înlocuirile preventive pot fi efectuate la intervale de timp discrete echivalente cu 100.000 de cicluri pe interval, să se determine atunci intervalul optim de înlocuire preventivă.

Rezolvare

Înlocuind elementele referitoare la cost în ecuația (10.2) se obține :

$$c(t_p) = \frac{50 + 100 M(t_p)}{t_p}$$

Folosind aproximarea discretă de timp pentru a calcula numărului așteptat de căderi și echivalând intervalul de timp cu 100.000 de cicluri, atunci:

$M(0)=0$

$$M(1) = [1 + M(0)] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \exp\left[\frac{-(t-10)^2}{2}\right] dt$$

$$M(1) = [1 + M(0)] \phi(1-10) = [1+0]0 = 0$$

unde

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} \exp\left[\frac{-t^2}{2}\right] dt$$

reprezintă funcția de distribuție cumulativă a unei distribuții normale standard cu media egală cu 0 și abaterea standard egală cu 1:

Scanned with OKEN Scanner

$$M(2)=[1+M(1)]\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 \exp\left[\frac{-(t-10)^2}{2}\right]dt$$

$$+[1+M(0)]\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_1^2 \exp\left[\frac{-(t-10)^2}{2}\right]dt$$

$$M(2)[1+0]0+[1+0][\phi(-8)-\phi(-9)]=0$$

Prin analogie

M(3)=0, M(4)=0, M(5)=0, M(6)=0,

$$M(7)=[1+M(6)]\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 \exp\left[\frac{-(t-10)^2}{2}\right]dt$$

$$+[1+M(5)]\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_1^2 \exp\left[\frac{-(t-10)^2}{2}\right]dt$$

$$+[1+M(4)]\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_2^3 \exp\left[\frac{-(t-10)^2}{2}\right]dt$$

$$+[1+M(3)]\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_3^4 \exp\left[\frac{-(t-10)^2}{2}\right]dt$$

$$+[1+M(2)]\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_4^5 \exp\left[\frac{-(t-10)^2}{2}\right]dt$$

$$+[1+M(1)]\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_5^6 \exp\left[\frac{-(t-10)^2}{2}\right]dt$$

$$+[1+M(0)]\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_6^7 \exp\left[\frac{-(t-10)^2}{2}\right]dt$$

$$M(7)=[1+0][\phi(-3)-\phi(-4)]=0{,}0014$$

$$M(8)=0+[1+M(1)]\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_6^7 \exp\left[\frac{-(t-10)^2}{2}\right]dt$$

$$[1+M(0)]\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_7^8 \exp\left[\frac{-(t-10)^2}{2}\right]dt=0{,}00275$$

Scanned with OKEN Scanner

M(9)=0,15875 ; M(10)=0,50005 ; M(11)=0,84135

În Tabelul 10.1 sunt prezentate valorile calculate pentru intervalul optim de intervenţie preventivă. Astfel costul preventiv minim pe ciclu este corespunzător la 800.000 de cicluri de funcţionare.

Tabelul 10.1 Valorile calculate pentru determinarea intervalului optim de intervenţie preventivă

Interval, t_p	*$M(t_p)$*	*$c(t_p)$*
100.000	0	0,000500
200.000	0	0,000250
300.000	0	0,000166
400.000	0	0,000125
500.000	0	0,000100
600.000	0	0,000083
700.000	0,0014	0,000072
800.000	0,00275	**0,000063***
900.000	0,15875	0,000073
1.000.000	0,50005	0,000100
1.100.000	0,84135	0,0001219

10.1.2. ÎNLOCUIREA LA PERIOADĂ PREDETERMINATĂ

Dezavantajul politicii de înlocuire la intervale constante este acela că unităţile sau componentele sunt înlocuite la defectări şi la interval de timp constant din momentul ultimei înlocuiri preventive. Acest lucru se poate întâmpla în cazul în care acest tip de înlocuiri preventive este operat la puţin timp după înlocuiri datorate căderilor. Politica de înlocuire la o perioada predeterminată (**PIPP**) constă în înlocuirea unităţilor după avarie sau după o durată de viaţă a acestora reprezentată printr-un timp t_p, funcţie de care dintre aceste situaţii are loc mai întâi. După /9/, dacă costul de funcţionare este independent de timp, costul pe unitatea de timp este :

$$c(t_p) = \frac{\text{cos}tul\ \ total\ \ asteptat\ al\ înlocuirii\ pe\ ciclu}{durata\ asteptata\ a\ ciclului} \qquad (10.7)$$

Pentru a calcula atât numărătorul, cât şi numitorul ecuaţiei (10.7) trebuie mai întâi să discutăm despre un ciclu tipic. Există două posibile cicluri de funcţionare. Primul este

Scanned with OKEN Scanner

atunci când echipamentul atinge vârsta t_p stabilită pentru înlocuirea preventivă şi al doilea, când echipamentul cedează înainte de a atinge această vârstă.
Numărătorul ecuației de mai sus poate fi determinat astfel :
Costul înlocuirii preventive x Probabilitatea la care echipamentul reuşeşte să atingă vârsta stabilită pentru înlocuirea preventivă + Costul înlocuirii în caz de avarie x Probabilitatea avarierii echipamentului înainte de atingerea timpului t_p:

$$= c_p R(t_p) + c_f [1 - R(t_p)] \tag{10.8}$$

Numitorul, în mod analog, este obținut astfel:
Durata unui ciclu preventiv x Probabilitatea unui ciclu preventiv + Durata aşteptată a ciclului până la avarie x Probabilitatea unui ciclu de apariție a avariei:

$$= t_p R(t_p) + \int_{-\infty}^{t_p} t f(t) dt \tag{10.9}$$

Împărțind ecuația (10.8) la ecuația(10.9), se va obține:

$$c(t_p) = \frac{c_p R(t_p) + c_f [1 - R(t_p)]}{t_p R(t_p) + \int_{-\infty}^{t_p} t f(t) dt} \tag{10.10}$$

Valoarea optimă a duratei ciclului de înlocuire preventivă se obține prin determinarea valorii t_p care minimizează ecuația (10.10). Acest lucru este posibil luând derivata parțială a ecuației (10.10) în raport cu t_p şi egalând ecuația rezultată cu zero :

$$\frac{\partial c(t_p)}{\partial t_p} = \frac{\left[-c_p f(t_p) + c_f f(t_p)\right] \int_0^{t_p} R(t) dt - \left[c_p R(t_p) + c_f F(t_p)\right] R(t_p)}{\left[\int_0^{t_p} R(t) dt\right]^2} = 0$$

Ciclul optim de înlocuire preventivă t^*_p este obținut prin simple artificii algebrice ale expresiei de mai sus :

Scanned with OKEN Scanner

$$f\left(t_p^*\right)\left[c_f - c_p\right]\int_0^{t_p^*} R(t)dt = \left[c_p R\left(t_p^*\right) + c_f F\left(t_p^*\right)\right] R\left(t_p^*\right)$$

$$\frac{f\left(t_p^*\right)}{R\left(t_p^*\right)}\int_0^{t_p^*} R(t)dt = \frac{1}{c_f - c_p}\left[c_p R\left(t_p^*\right) + c_p F\left(t_p^*\right) + c_f F\left(t_p^*\right) - c_p F\left(t_p^*\right)\right]$$

$$h\left(t_p^*\right)\int_0^{t_p^*} R(t)dt = \frac{1}{c_f - c_p}\left[c_p + \left(c_f - c_p\right)F\left(t_p^*\right)\right]$$

$$h\left(t_p^*\right)\int_0^{t_p^*} R(t)dt = \frac{c_p}{c_f - c_p} + F\left(t_p^*\right)$$

EXEMPLUL 10.3

Se presupune că politica de înlocuire la intervale constante aplicată în exemplul (10.2) poate fi comparată cu politica de înlocuire la o perioadă prestabilită folosind aceleaşi costuri. Să se determine intervalul optim de înlocuire preventivă pentru politica de înlocuire la perioadă prestabilită. Care dintre cele două politici este de preferat?

Rezolvare

Se evaluează ecuaţia (10.10) pentru diferite valori ale lui t_p *:*

$$c\left(t_p\right) = \frac{100 - 50R\left(t_p\right)}{t_p R\left(t_p\right) + \int_{-\infty}^{t_p} t f(t)dt} \qquad (10.11)$$

unde

$$R\left(t_p\right) = 1 - \int_{-\infty}^{t_p} f(t)dt = \int_{t_p}^{\infty} f(t)dt \qquad \textit{sau}$$

$$R(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{t_p}^{\infty} \exp\left[\frac{-(t-10)^2}{2}\right]dt$$

Scanned with OKEN Scanner

Echivalent,

$$R(t_p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{t_p-10}^{\infty}\exp\left[\frac{-t^2}{2}\right]dt \qquad (10.12)$$

Al doilea termen al numitorului ecuaţiei (10.11) se calculează astfel:

$$\int_{-\infty}^{t_p} tf(t)dt = \int_{-\infty}^{t_p}\frac{t}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[\frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]dt$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t_p}[(t-\mu)+\mu]\exp\left[\frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]dt$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t_p}[t-\mu]\exp\left[\frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]dt$$

$$+\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t_p}\mu\exp\left[\frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]dt$$

$$=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t_p}-d\left(\exp\left[\frac{(t-\mu.)^2}{2\sigma^2}\right]\right)+\mu\phi\left(\frac{t_p-\mu}{\sigma}\right)$$

$$=\frac{-\sigma}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[\frac{-(t_p-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]+\mu\phi\left(\frac{t_p-\mu}{\sigma}\right)$$

Sau

$$\int_{-\infty}^{t_p} tf(t)dt = -\sigma\phi\left(\frac{t_p-\mu}{\sigma}\right)+\mu\Phi\left(\frac{t_p-\mu}{\sigma}\right) \qquad (10.13)$$

unde

$$\phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[\frac{-t^2}{2}\right] \quad şi \quad \Phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t}\exp\left[\frac{-t^2}{2}\right]dt$$

sunt privite ca funcţii de distribuţie ordinare şi respectiv cumulative ale distribuţiei normale standard N(0, 1). În tabelul 10.2 sunt prezentate în rezumat calculele pentru diferite valori ale lui t_p. Intervalul optim pentru înlocuire preventivă în cazul înlocuirii la o perioadă predeterminată este de 800.000 de cicluri. Rezultatul acestei politici este identic cu cel obţinut în cazul aplicării politicii de înlocuire la intervale constante. Acest lucru se datorează faptului că timpul intervalului a fost stabilit la 100.000 de cicluri.

Scanned with OKEN Scanner

Micşorarea intervalului de timp poate duce la diferenţe semnificative între aceste două politici.

Tabelul 10.2 Politica înlocuirii la vârsta optimă

t_p	$R(t_p)$	$\phi\left(\frac{t_p-\mu}{\sigma}\right)$	$\Phi\left(\frac{t_p-\mu}{\sigma}\right)$	$c(t_p)$/ ciclu
100.000	1,00	0	0	0,000500
200.000	1,00	0	0	0,000250
300.000	1,00	0	0	0,000166
400.000	1,00	0	0	0,000125
500.000	1,00	0	0	0,000100
600.000	1,00	0	0	0,000083
700.000	0,9987	0,004	0,0013	0,000072
800.000	0,9773	0,054	0,0227	**0,000064***
900.000	0,8413	0,242	0,1587	0,000065
1.000.000	0,5000	0,398	0,5000	0,00016
1.100.000	0,1587	0,242	0,8413	0,00009

10.2 MODELE DE ÎNTREŢINERE PREVENTIVĂ ŞI ÎNLOCUIRE. MINIMIZAREA PERIOADEI DE NEFUNCŢIONARE

Modelele prezentate în subcapitolul 10.1 determină intervalul optim pentru întreţinerea preventivă care minimizează costul total pe unitatea de timp. Există multe situaţii în care utilizarea echipamentului este mult mai importantă decât costul reparaţiei sau întreţinerii, atunci când întreruperea funcţionării echipamentului conduce la costuri inimaginabile. În asemenea cazuri, este mai indicat să minimizezi durata întreruperii funcţionării raportată la unitatea de timp decât să minimizezi costul total pe unitatea de timp. În subcapitolele ce urmează se vor prezenta două politici de înlocuire preventivă având ca obiectiv minimizarea perioadei de întrerupere a funcţionării raportată la unitatea de timp.

10.2.1 POLITICA DE ÎNLOCUIRE LA INTERVALE CONSTANTE (PIIC)

Este cea mai simplă politică de înlocuire şi întreţinere preventivă. Este identică cu politica discutată în subcapitolul 10.1.1, cu excepţia faptului că obiectivul său este de a minimiza perioada de întrerupere a funcţionării echipamentului raportat la unitatea de

Scanned with OKEN Scanner

timp – adică, minimizarea ne-funcţionării unui echipament. Potrivit acestei politici înlocuirile sunt operate la perioade de timp stabilite, indiferent de perioada care a trecut de la ultima înlocuire a echipamentului. Cu alte cuvinte, înlocuirile sunt făcute după încetarea funcţionării echipamentului. Conform /9/, se va re-scrie ecuaţia (10.1) după cum urmează:

$$D(t_p) = \frac{perioada\ \ totală\ de\ ne-functionare}{durata\ ciclului} \tag{10.14}$$

unde :

Perioada totală de nefuncţionare = perioada de nefuncţionare datorată avariei + Perioada de nefuncţionare datorată înlocuirii preventive
= numărul aşteptat de avarii în $(0, t_p]$ x intervalul de timp în care este operată o înlocuire după avarie + T_p

sau

Perioada totală de ne-funcţionare = $M(t_p)\ T_f + T_p$,

Unde:

T_f = intervalul de timp în care se operează o înlocuire după avarie,
T_p = intervalul de timp în care se operează o înlocuire preventivă,
$M(t_p)$ = numărul aşteptat de avarii în intervalul $(0, t_p]$.

Durata ciclului este dat de suma dintre intervalul de timp în care se operează întreţinerea preventivă şi durata ciclului de înlocuire preventivă = $T_p + t_p$. Astfel ecuaţia (10.14) devine:

$$D(t_p) = \frac{M(t_p)T_f + T_p}{T_p + t_p} \tag{10.15}$$

10.2.2 ÎNLOCUIREA PREVENTIVĂ LA O PERIOADĂ PRESTABILITĂ

Această politică este similară cu cea prezentată în subcapitolul 10.1.2. Potrivit acesteia, înlocuirile preventive sunt operate după avarierea echipamentului sau când echipamentul atinge vârsta t_p. Obiectivul este acela de a determina perioada optimă t_p pentru înlocuire preventivă care minimizează perioada de nefuncţionare raportată la unitatea de timp:

Scanned with OKEN Scanner

$$D(t_p) = \frac{\textit{perioada totală de nefuctionare asteptata / ciclu}}{\textit{durata asteptata a ciclului}} \qquad (10.16)$$

Perioada totală de nefuncţionare aşteptată, raportată la un ciclu, reprezintă suma dintre perioada totală de nefuncţionare datorată unei înlocuiri preventive x probabilitatea unei înlocuiri preventive şi perioada de nefuncţionare datorată unui ciclu de avarie x probabilitatea unui ciclu de avarie. Numărătorul ecuaţiei (10.16) este:

$$T_pR(t_p) + T_f[1-R(t_p)]$$

Prin analogie, durata aşteptată a ciclului este:

$$(t_p + T_p)R(t_p) + \left[\int_{-\infty}^{t_p} tf(t)dt + T_f\right][1 - R(t_p)]$$

Prin urmare,

$$D(t_p) = \frac{T_pR(t_p) + T_f[1 - R(t_p)]}{(t_p + T_p)R(t_p) + \left[\int_{-\infty}^{t_p} tf(t)dt + T_f\right][1 - R(t_p)]} \qquad (10.17)$$

Este important de remarcat faptul că, aceleaşi condiţii specifice modelelor pentru minimizarea costurilor sunt valabile şi pentru modelele de minimizare a perioadelor de nefuncţionare. În plus, se înlocuieşte costul fixat din cadrul politicii de minimizare a costurilor cu perioada de timp fixă în care nu funcţionează echipamentul – cu alte cuvinte, timpul în care sunt operate înlocuirile dupa avarie este mai mare decât timpul în care sunt operate înlocuirile preventive sau $T_f > T_p$.

EXEMPLUL 10.4

Se presupune că T_f = 50.000 cicluri şi T_p = 25.000 cicluri. Să se determine parametrii politicii de înlocuire preventivă la intervale constante şi ai politicii de înlocuire la o perioada prestabilită, pentru echipamentul dat în exemplul 10.2.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare

Valorile calculate ale lui $M(t_p)$, $\int_{-\infty}^{t_p} f(t)$ şi $R(t_p)$ sunt prezentate în Tabelul 10.3. În cazul politicii de înlocuire la intervale constante (PIIC), se înlocuiesc parametrii cunoscuţi în ecuaţia (10.15) şi se obţine:

$$D_{PIIC}(t_p) = \frac{25.000[1 + 2M(t_p)]}{25.000 + t_p} \qquad (10.18)$$

Tabelul 10.3. $M(t_p), R(t_p), \int_{-\infty}^{t_p} tf(t)dt$

t_p	$M(t_p)$	$R(t_p)$	$1-R(t_p)$	$\phi(t_p)$	$\Phi(t_p)$	$\int_{-\infty}^{t_p} tf(t)dt$
100.000	0	1.00	0	0	0	0
200.000	0	1.00	0	0	0	0
300.000	0	1.00	0	0	0	0
400.000	0	1.00	0	0	0	0
500.000	0	1.00	0	0	0	0
600,000	0	1.00	0	0	0	0
700.000	0,00140	0,9987	0,0013	0,004	0,0013	900
800.000	0,00275	0,9773	0,0227	0,054	0,0227	17300
900.000	0,15875	0,8413	0,1587	0,242	0,1587	134500
1.000.000	0,50050	0,5000	0,5000	0,398	0,5000	460110
1.100.000	0,84135	0,1587	0,8413	0,242	0,8413	817100

Perioada de ne-funcţionare raportată la un ciclu în cazul politicii de înlocuire la o perioadă prestabilită (PIPP) se obţine folosind relaţia:

$$D_{PIPP}(t) \frac{25.000[2 - R(t_p)]}{(25.000 + t_p)R(t_p) + \left[\int_{-\infty}^{t_p} tf(t)dt + 50.000\right][1 - R(t_p)]} \qquad (10.19)$$

Rezultatele sunt prezentate comparativ în Tabelul 10.4. Cele două politici au rezultatul comun: interval optim este de 800.000 cicluri.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 10.4

t_p	$D_{PIIC}(t_p)$	$D_{PIPP}(t_p)$
100.000	0,2000	0,2000
200.000	0,1111	0,1111
300.000	0,0769	0,0769
400.000	0,0588	0,0588
500.000	0,0476	0,0476
600.000	0,0400	0,0400
700.000	0,0346	0,0346
800.000	**0,0305***	**0,0316***
900.000	0,0356	0,0362
1.000.000	0,0488	0,0505
1.100.000	0,0596	0,0532

10.3. MODELE PENTRU REPARAŢII MINIME

Întreţinerea unui sistem complex alcătuit din mai multe componente poate fi realizată prin înlocuirea, repararea sau ajustarea/reglarea componentelor sistemului.

Înlocuirile, reparaţiile sau ajustările componentelor, de regulă, repun în funcţiune întregul sistem, însă rata de avarie a acestuia rămâne neschimbată, adică aceeaşi ca înainte de producerea avariei. Acest tip de reparaţie se numeşte *reparaţie minimală*.

Atâta timp cât rata de avarie a sistemului complex creşte odată cu vârsta(perioada de funcţionare) acestuia, atunci vor creşte implicit şi costurile de menţinere a sistemului în funcţionare prin reparaţii minimale. Variabila cea mai importantă, în acest caz, o constituie perioada optimă de înlocuire a întregului sistem în locul efectuării reparaţiilor minimale.

Modelele pentru reparaţii minimale presupun că, în general, funcţia ratei de defectare a sistemului creşte în timp iar reparaţiile minimale nu afectează rata de defectare. Asemeni modelelor de înlocuire preventivă, costul reparaţiei minime, c_f, este mai mic decât costul înlocuirii întregului sistem, c_r. Costul aşteptat, raportat la unitatea de timp, după perioada de funcţionare t, este:

$$c(t) = \frac{c_f M(t) + c_r}{t} \qquad (10.20)$$

unde $M(t)$ reprezintă numărul reparaţiilor minime aşteptate în intervalul de timp $(0, t]$. Acest model este similar celui de înlocuire preventivă dat de ecuaţia (10.1).

Scanned with OKEN Scanner

Tilquin şi Cléroux /36/ adună costul reparaţiilor/ajustărilor la numărătorul ecuaţiei (10.20). Costul de ajustare $c_a(ik)$ la perioada de timp/vârsta ik, $i = 1, 2, 3$ şi $k > 0$ este adunat la costul reparaţiilor minime şi la costul înlocuirii sistemului. Acest model este mult mai apropiat de realitate atâta timp cât costul de ajustare $c_a(ik)$ poate fi folosit pentru a reflecta costul real de operare al sistemului (costurile de ajustări periodice, costurile de depreciere sau costurile pentru accesorii). Re-scriind ecuaţia (10.20) pentru a include costurile de ajustare, se obţine:

$$c(t) = \frac{c_f M(t) + c_r + c_a^*(v(t))}{t} \tag{10.21}$$

unde $c_a^*(v(t)) = \sum_{i=1}^{v(t)} c_a(ik)$ şi $v(t)$ reprezintă numărul de ajustări în intervalul $(0, t]$.

Acest model poate fi extins pentru a modifica costul reparaţiilor minime c_f prin includerea a două părţi: prima parte reprezintă sumă fixă sau planificată a, iar cea de-a doua parte reprezintă un cost variabil în funcţie de numărul de reparaţii minime efectuate de la ultima înlocuire – adică, $c_r = a + bk$, unde $a > 0$ şi $b \geq 0$ sunt constante, iar k reprezintă reparaţia minimă de ordin k.

10.3.1. MOMENTUL OPTIM DE ÎNLOCUIRE ÎN CAZUL REPARAŢIEI MINIME

Aşa cum s-a menţionat mai devreme, majoritatea modelelor pentru reparaţii minime presupun ca în urma reparaţiilor sistemul să funcţioneze *ca nou*. Cu alte cuvinte sistemul este reînnoit după fiecare perioada de nefuncţionare (avarie). Acest lucru este valabil pentru o parte din situaţii, cum ar fi cele în care este înlocuit întregul sistem de frâne al unui vehicul cu unul nou, însă în alte situaţii sistemul avariat va funcţiona din nou după reparaţie, dar va avea aceeaşi rată de defectare şi aceeaşi vârstă efectivă la timpul de defectare. În mod evident, când o maşină are o rată de defectare în creştere, perioada sa de funcţionare după reparaţii va deveni din ce în ce mai scurtă, rezultând un timp finit de funcţionare. Similar, cu cât funcţionare sistemului înaintează în timp cu atât timpul pentru reparaţie devine din ce în ce mai lung tinzând către infinit – prin urmare sistemul va deveni ne-reparabil. Astfel, în cadrul unui model corespunzător acestui tip de sistem, perioadele de timp succesive de supravieţuire au o descreştere stocastică, fiecare perioadă de timp de funcţionare (supravieţuire) este urmată de o perioadă de timp de reparaţie, iar timpii de reparaţie au o creştere stocastică. Această problemă poate fi modelată utilizând procesul ne-omogen Poisson /34/.

Scanned with OKEN Scanner

Se consideră modelul cel mai general de înlocuire, în care se presupune că timpii succesivi de funcţionare/supravețuire ai sistemului $(X_n, n = 1, 2, \ldots)$ formează un proces de descreştere stocastic, că fiecare perioadă de funcţionare are o rata de defectare crescătoare (**RDC**) şi timpii consecutivi de reparaţie $(Y_n, n = 1, 2, \ldots)$ constituie un proces stocastic crescător şi că, fiecare perioadă de reparaţie are proprietatea probabilă că piesa nouă va fi mai bună decât cea folosită (**PNBF**). Se consideră o politică de înlocuire tip T. În cadrul acestei politici sistemul este reparat (înlocuit) dupa trecerea unui interval de timp T de la ultima înlocuire. Se presupune că valoarea costului reparaţiei este c, iar costul înlocuirii în cadrul intervalului de funcţionare este c_o. De asemenea, se presupune că valoarea costului de înlocuire este c_f dacă sistemul este reparat după avarie sau în timpul reparaţiei, iar $c_f \geq c_o$. Profitul pe unitatea de timp a sistemului este R.

Teorema I : Dacă

1. X_n şi Y_n sunt ambele variabile non-negative, $\forall n \geq 1$, $\lambda_n = E(X_n)$ este non-crescător şi $\mu_n = E(Y_n)$ este non-descrescător
2. $lim_{n\to\infty}\lambda_n = 0$, $lim_{n\to\infty}\mu_n = \infty$
3. $(X_n, n=1, 2, \ldots)$ şi $(Y_n, n= 1, 2, \ldots)$ sunt două secvenţe independente ale celor două variabile diferite, de asemenea X_n este de tip RDC şi Y_n este de tip PNBF, $\forall n \geq 1$ şi
4. $c_f = c_o$

atunci perioada optimă de înlocuire este :

$$T^* = \sum_{i=1}^{n_0} X_i + \sum_{i=1}^{n_0-1} Y_i \qquad (10.22)$$

unde

$$n_0 = \min\{n \geq 1 / (c + \phi^*)\mu_n \geq (R - \phi^*)\lambda_{n+1}\} \qquad (10.23)$$

şi ϕ^* reprezintă valoarea optimă a profitului pe termen lung.

O politică de înlocuire echivalentă constă în înlocuirea sistemului după un număr N de avarii în care intervalul de timp la care se produce a N-a avarie este aproape egal cu timpul T^*. Această politică va fi definită ca fiind politica de tip N. Odată ce N^* este

Scanned with OKEN Scanner

determinat, imediat se pot evalua valorile corespunzătoare ale lui T^* şi ϕ^* , aşa cum s-a arătat mai sus.

Fie o politică de tip N care operează în următoarele condiţii:

1. După ce sistemul cedează, fie este reparat, fie este înlocuit cu un sistem nou, identic.
2. Similar politicii tip T^*, timpul de funcţionare/supravețuire X_k ,după reparaţia $(k\text{-}1)$, formează o secvenţă de variabile non-negative cu o medie non-crescătoare $E[X_k] = \lambda_k$, iar timpul de reparaţie Y_k, după avaria de ordin k, formează o secvenţă de variabile non-negative cu o medie non-descrescătoare $E[Y_k] = \mu_k$.
3. Costul de reparaţie este c, costul de înlocuire în cadrul acestei politici este c_f, iar profitul pe unitatea de timp a funcţionării sistemului este R.

Potrivit teoriei reînnoirii, media profitului pe unitatea de timp înainte de a N-a avarie, $R(N)$, este /34/:

$$R(N) = \frac{R\sum_{k=1}^{N}\lambda_k - c\sum_{k=1}^{N-1}\mu_k - c_f}{\sum_{k=1}^{N}\lambda_k + \sum_{k=1}^{N-1}\mu_k} \tag{10.24}$$

sau

$$R(N) = R - c(N) \tag{10.25}$$

unde R reprezintă profitul pe unitatea de timp a funcţionării sistemului, iar $c(N)$ reprezintă costul pe unitatea de timp şi este dat de :

$$c(N) = \frac{(c+R)\sum_{k=1}^{N-1}\mu_k + c_f}{\sum_{k=1}^{N}\lambda_k + \sum_{k=1}^{N-1}\mu_k}, \qquad N = 1, 2 \ldots\ldots \tag{10.26}$$

Scanned with OKEN Scanner

Politica de înlocuire optimă de tip N^* este obţinută prin aflarea lui N care maximizează pe $R(N)$ sau minimizează pe $c(N)$. Acest lucru poate fi obţinut prin utilizarea ecuaţiei (10.26) şi scăderea lui $c(N^*)$ din $c(N^*+1)$, după cum urmează:

$$c(N^*+1) - c(N^*) = \{(c + R)f_N - c_f(\lambda_{N+1} + \gamma_N)\}/\Delta_N$$

unde

$$\Delta_N = \left(\sum_{K=1}^{N+1}\lambda_k + \sum_{k=1}^{N}\mu_k\right)\left(\sum_{k=1}^{N}\lambda_k + \sum_{k=1}^{N-1}\mu_k\right)$$

iar

$$f_N = \mu_N\sum_{k=1}^{N}\lambda_k - \lambda_{N+1}\sum_{k=1}^{N-1}\mu_k \qquad (10.27)$$

Se defineşte:

$$g_N = (\lambda_{N+1} + \mu_N)/f_N \qquad (10.28)$$

Prin urmare,

$$g_{N+1} - g_N = (\lambda_{N+2}\mu_N - \lambda_{N+1}\mu_{N+1})\left(\sum_{k=1}^{N+1}\lambda_k + \sum_{k=1}^{N}\mu_k\right)/(f_N f_{N+1}) \le 0$$

Dar g_N este o secvenţă non-crescătoare, de la $g_1 = (\lambda_2 + \mu_1)/(\lambda_1\mu_1)$ la $g_\infty = lim_{N\to\infty} g_N$ şi $c(N+1) \le$ sau $\ge c(N)$, după cum $g_N \ge$ sau $\le (c+R)/c_f$. De aceea, politica optimă de tip N^* este determinată de :

$$N^* = \min\{N \ge 1/g_N \le (c + R)/c_f\} \qquad (10.29)$$

Politica optimă de înlocuire tip N^* dată de ec.(10.29) este exact aceeaşi cu politica tip T^* dată de ecuaţia (10.22), iar valoarea optimă a lui ϕ^* este :

$$\phi^* = R(N^*) = R - c(N^*) \qquad (10.30)$$

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

EXEMPLUL 10.5

O turbină este folosită pentru a furniza putere către o stație de pompare de gaz natural. Elicea este componenta cea mai importantă, și în aceeași măsură expusă, din cadrul turbinei. Pentru a reduce efectul de distrugere a elicei și acela de propagare a avariei este implementată o politică de tip N. Când cedează această componentă, este înlocuită sau reparată cu un preț c = 100 RON. După N înlocuiri sau reparații, turbina este înlocuită cu una nouă la o valoare c_f = 12.000 RON. Se presupune că rata profitului este de 20 RON pe oră. Timpul de funcționare λ_k și timpul de reparație μ_k, după avaria k, sunt:

$$\lambda_k = \frac{5000}{2^{k-1}} \quad ; \quad \mu_k = 100 \text{ x } 2^{k-1}$$

Să se determine parametrii unei politici optime de înlocuire tip N.*

Rezolvare

Se calculează:

$$\frac{c+R}{c_f} = \frac{100+20}{12.000} = 0{,}01$$

De asemenea, se calculează g_N și f_N pentru diferite valori ale lui N, prezentate în Tabelul 10.5. Din Tabelul 10.5 rezultă că politica optimă de înlocuire este N = 2. Cu alte cuvinte, turbina ar trebui să fie înlocuită după două avarii sau după 7.500 de ore. Profitul ϕ^* optim este obținut prin înlocuirea valorilor corespunzătoare în ecuația (10.30):*

$$\phi^* = R - c(N^*)$$

sau

$$\phi = 20 - 3{,}077 = 16{,}923 \text{ RON.}$$

*Tabelul 10.5. Valorile lui N**

N	λ_N	μ_N	f_N	g_N
1	5000	100	$5\text{x}10^5$	0,0102
2	2500	200	$13{,}75\text{x}10^5$	0,00196

10.4. INTERVALE OPTIME DE ÎNLOCUIRE PENTRU SISTEMELE SUPUSE LA ŞOCURI

Întreţinerea preventivă şi modelele de înlocuire discutate până acum presupun expunerea componentelor sau a sistemului însuşi la uzură sau deteriorări graduale – adică, va exista o rată de defectare crescătoare.

Există multe situaţii în care sistemul este supus la şocuri, ceea ce poate determina deteriorarea sa. De exemplu, sistemele hidraulice şi electrice ale avioanelor sunt supuse la şocuri ori de câte ori decolează ori aterizează aparatele respective. În mod evident sistemele supuse la asemenea şocuri se vor deteriora sau chiar vor ceda. În acest subcapitol, va fi prezentată o politică optimă de înlocuire pentru astfel de sisteme /9/.

Se presupune că, costul obişnuit de funcţionare al sistemului pe unitatea de timp este a şi că fiecare şoc duce la creşterea acestui cost cu cantitatea c pe unitatea de timp.

Sistemul este înlocuit în întregime la intervale de timp T, $2T$, . . . la un cost c_0 pentru fiecare înlocuire completă a sistemului. Acest lucru este privit ca o politică periodică de înlocuire al cărei unic parametru este T, iar inginerii bine pregătiţi caută, de regulă, valoarea optimă a lui T care optimizează criterii precum minimalizarea mediei costurilor pe o perioadă cât mai lungă de timp sau maximizarea funcţionării corecte a sistemului pe întreg intervalul T. Evident că, dacă intervalul de timp T are o mărime apreciabilă, atunci costul funcţionării sistemului şi al înlocuirii va varia de la o perioadă la alta funcţie de schimbările intervenite în timp legate de costul muncii şi al materialelor. De aceea, se vor prezenta două politici periodice de înlocuire: prima politică consideră că toate costurile componentelor sistemului sunt independente de timp, iar cea de-a doua politică consideră că unele dintre aceste costuri sunt dependente de timp.

10.4.1. POLITICA DE ÎNLOCUIRE PERIODICĂ CU COSTURI INDEPENDENTE DE TIMP

Astfel cum s-a menţionat în subcapitolul anterior, sistemul este supus la repetate şocuri şi este înlocuit în întregime după o perioadă de timp determinată T. Fie $N(t)$ numărul şocurilor la care este supus sistemul în intervalul de timp $(0, t]$ şi fie $n = (N(t), t \geq 0)$. Pentru a simplifica analiza, se presupune că salturile lui N sunt cu amplitudinea de o unitate şi că τ_n reprezintă secvenţa salturilor de timp în cadrul procesului N.

Costul total de funcţionare a sistemului pentru perioada T, pentru o valoare determinată a lui τ_n, este:

$$aT + c(\tau_2 - \tau_1) + \ldots + c(N(T)-1)(\tau_{N(T)} - \tau_{N(T)-1}) + cN(T)(T - \tau_{N(T)}) + c_0 \qquad (10.31)$$

Scanned with OKEN Scanner

Expresia de mai sus poate fi re-scrisă astfel:

$$aT + c\int_0^T N(t)dt + c_0 \qquad 10.32)$$

Utilizând Teorema lui Fubini /9/, costul total al funcţionării sistemului pe o perioadă determinată T este dat de :

$$aT + c\int_0^T M(t)dt + c_0 \qquad (10.33)$$

unde $M(t)$ reprezintă numărul aşteptat de şocuri în intervalul $(0, t]$. Media costului unitar de funcţionare pe termen lung, $C(T)$, se obţine împărţind ecuaţia (10.33) cu valoarea perioadei de înlocuire T. Cu alte cuvinte,

$$C(T) = \left[aT + c\int_0^T M(t)dt + c_0 \right] / T \qquad (10.34)$$

Obiectivul este de a determina acea valoare a lui T care minimizează ecuaţia (10.34). Atâta timp cât $C(T)$ este o funcţie diferenţială de T, iar derivata ei de prim rang este,

$$C'(T) = \left[c\int_0^T [M(T) - M(t)]dt - c_0 \right] / T^2$$

şi atâta timp cât $\int_0^T [M(T) - M(t)]dt$ este pozitivă şi crescătoare, atunci valoarea optimă a intervalului de înlocuire periodică există întotdeauna şi este egală cu soluţia unică a

$$\int_0^T [M(T) - M(t)]dt = \frac{c_0}{c} \qquad (10.35)$$

Mai mult, valoarea lui T^* este una finită dacă şi numai dacă

Scanned with OKEN Scanner

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T[M(T)-M(t)]dt > c_0 / c \qquad (10.36)$$

Estimarea valorii lui $M(t)$ când şocurile se produc în concordanţă cu un proces de producţie ne-staţionar pur este prezentată în /9/. Dacă rata de producere a şocurilor este λ, probabilitatea producerii unui şoc în cadrul intervalului $[t,\ t+\Delta)$, atâta timp cât în cadrul intervalului $(0,\ t]$ s-au produs k şocuri, este $\lambda_k(t)$.

Se presupune că $\{N(t);\ t > 0\}$ reprezintă numărul de şocuri. Când $\lambda_k = k\lambda(t)$ şi $N(0) > 0$, procesul de numărare se numeşte *procesul Yule*; când $\lambda_k \equiv \lambda$, poartă de numirea de *procesul Poisson*. Atâta timp cât $N(t)$ este un proces *Yule* ne-staţionar – pentru k =1, 2,....

$$\lambda_k = k\lambda(t)$$

atunci avem

$$M(t)-1=\int_0^t \lambda(x)M(x)dx \qquad (10.37)$$

Ecuaţia (10.37) are următoarea soluţie :

$$M(t)=e^{\int_0^t \lambda(x)dx} \qquad (10.38)$$

Cum s-a menţionat şi anterior, valoarea optimă a politicii de înlocuire periodică (T^*) există numai dacă $\lambda(t)$ este o funcţie crescătoare în raport cu t.

EXEMPLUL 10.6

Fie o componentă a cărei rată de defectare este $\lambda(t) \equiv \lambda$. Se presupune că: cuantumul costului normal de funcţionare al sistemului este de 0,50 RON pe oră, valoarea costului de funcţionare a sistemului în urma fiecărui şoc creşte cu 0,055 RON pe oră, iar costul de înlocuire a întregii componente este de 15.000 RON. Să se determine valoarea optimă a lui T şi media costurilor corespunzătoare înlocuirii pe oră, pentru diferite valori ale ratei şocurilor.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare

Din textul de mai sus avem următoarele date:

$a = 0{,}5$ RON ; $c = 0{,}055$ RON ; $c_0 = 15\,000$ RON

Folosind ecuația (10.38), se obține:

$M(t) = e^{\lambda t}$.

Înlocuind în ecuația (10.35), se obține:

$e^{\lambda t}[\lambda T - 1] = (\lambda c_0 / c) - 1$

Rezolvând ecuația, pentru diferite valori ale lui λ, se obține intervalul optim de înlocuire și media costurilor de înlocuire raportate la unitatea de timp, C(T), așa cum sunt prezentate în Tabelul 10.6.

Tabelul 10.6. Intervalul optim pentru înlocuire

λ	T^*	$C(T^*)$
1×10^{-4}	27.239,267	1,0507
2×10^{-4}	15.972,763	1,4391
4×10^{-4}	9.231,254	2,1251
6×10^{-4}	6.657,679	2,7534
8×10^{-4}	5.266,755	3,3487
1×10^{-3}	4.385,343	3,9214
6×10^{-3}	970,945	15,9680
8×10^{-3}	758,135	20,3165
1×10^{-2}	625,206	24,5376
6×10^{-2}	129,794	117,0886
8×10^{-2}	100,487	151,4683
1×10^{-1}	82,347	185,1727

10.4.2. POLITICA DE ÎNLOCUIRE PERIODICĂ CU COSTURI DEPENDENTE DE TIMP

Această politică este similară cu cea prezentată în subcapitolul 10.4.1 cu excepția faptului că valoarea costului de înlocuire raportat la unitatea de timp este dependentă de numărul de șocuri și de intervalul de timp la care se produc șocurile. Potrivit politicii din subcap. 10.4.1., se presupune că procesul evoluției numărului de șocuri $N = (N(t), t \geq 0)$ prezintă salturi egale cu unitatea. Fie τ_n secvența care descrie salturile în timp din cadrul procesului de evoluție a șocurilor N. Costul suplimentar de funcționare a sistemului pe unitatea de timp datorită fiecărui șoc suplimentar din cadrul intervalului $[\tau_i, \tau_i + 1)$ este $c_i(u)$, $i = 0, 1, ...$, iar u reprezintă momentul la care este oportună efectuarea

Scanned with OKEN Scanner

înlocuirii periodice. Se presupune că $\tau_0 = 0$. Costul normal pentru funcţionarea sistemului pe unitatea de timp este a, iar costul de înlocuire completă a sistemului este c_0. Similar politicii de înlocuire periodică cu o valoare constantă a costului, sistemul este înlocuit integral la intervalele T, $2T$, . . ., iar procesul porneşte de la timpul zero la fiecare înlocuire. Costul total prevăzut pentru funcţionarea sistemului pe fiecare perioadă este format din suma costului de funcţionare (aT), a costul suplimentar datorită şocului, $\int_0^T Ec_{N(t)}(t)dt$, şi a costul de înlocuire integrală a sistemului. Acest lucru este exprimat de:

$$aT + \int_0^T Ec_{N(t)}(t)dt + c_0 \tag{10.39}$$

unde $Ec_{N(t)}$ reprezintă aproximarea funcţiei costului suplimentar datorat şocurilor produse la momentul t. Costul mediu de funcţionare a sistemului pe unitatea de timp este obţinut prin împărţirea ecuaţiei (10.39) la mărimea perioadei de timp T.

Se defineşte $h(t) = E(c_{N(t)})$, mărime care indică faptul că dacă h este continuă şi crescătoare, atunci valoarea optimă a intervalului de înlocuire periodică există şi este unica soluţie a ecuaţiei (10.40):

$$\int_0^T [h[T] - h(t)]dt = \frac{c_0}{c} \tag{10.40}$$

Perioada T are valoare finită dacă şi numai dacă

$$\lim_{T\to\infty} \int_0^T [h(T) - h(t)]dt > \frac{c_0}{c} \tag{10.41}$$

10.5. ÎNTREŢINEREA PREVENTIVĂ ŞI NUMĂRUL PIESELOR DE SCHIMB

În subcapitolul 10.1.1, costul total prevăzut pe unitatea de timp este exprimat de

$$c(t_p) = \frac{c_p + c_f M(t_p)}{t_p} \tag{10.42}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde c_p şi c_f reprezintă costul înlocuirii preventive/planificate şi, respectiv, costul înlocuirii după avarie. $M(t_p)$ reprezintă funcţia de reînnoire şi se raportează la distribuţia timpului de defectare $F(t)$ prin integrarea ecuaţiei de reînnoire.

Una dintre cele mai importante decizii referitoare la funcţionarea întreţinerii preventive este determinarea numărului suportat de piese de schimb. În mod evident, dacă numărul acestor piese de schimb aflate la îndemână este mai mic decât ceea ce este necesar în cadrul ciclului de întreţinere preventivă, sistemul ce urmează să fie reparat se va confrunta cu o perioadă de timp de nefuncţionare până în momentul în care vor fi disponibile acele piese de schimb suplimentare. Pe de altă parte, dacă vor exista mai multe piese de schimb decât cele necesare ciclului de întreţinere preventivă atunci, va interveni un cost inutil pe ansamblul funcţionării. Ideal, numărul pieselor de schimb aflate în depozit ar trebui să fie egal cu cel necesar numărului de reparaţii din cadrul ciclului de întreţinere preventivă. Cu toate acestea, numărul reparaţiilor (al avariilor) este o variabilă oarecare care face ca determinarea numărului exact al pieselor de schimb să fie o sarcină dificilă. În acest subcapitol se va prezenta modul de determinare a numărului optim de piese de schimb ce trebuie să existe în inventar pentru a fi incluse de la început în ciclului de întreţinere preventivă astfel încât costul total din cadrul unui ciclu să fie redus la minim.

Numărul de piese de schimb necesar pentru un ciclu de întreţinere preventivă este $[1+N_1(t_p)]$, unde $N_1(t_p)$ este o variabilă oarecare ce reprezintă numărul de înlocuiri în caz de avarie în cadrul ciclului t_p. Se presupune că numărul iniţial al pieselor de schimb aflate în stoc este L. La sfârşitul ciclului de întreţinere preventivă costurile stocurilor sunt egale cu zero dacă $L = N_1(t_p) + 1$; în caz contrar va interveni un cost suplimentar datorat crizei de piese (datorită ne-disponibilităţii acestora atunci când este necesar). Se defineşte $g(L, N_1(t_p))$ ca o funcţie de penalizare care creşte la $[L - (N_1(t_p)+1)]$ şi tinde la zero. Presupunând că valoarea costului stocurilor pentru fiecare unitate în exces egalează costul de nefuncţionare pe unitate, se va exprima funcţia de penalizare g astfel /36/:

$$g\left[L, N_1\left(t_p\right)\right] = \left[L - \left(N_1\left(t_p\right)+1\right)\right]^2 \qquad (10.43)$$

Atâta timp cât $N_1(t_p)$ este o variabilă oarecare, atunci valoare aşteptată pentru funcţia de penalizare, $D(L, t_p)$, este:

$$D\left(L, t_p\right) = E\left\{g\left[L, N_1\left(t_p\right)\right]\right\}$$

Scanned with OKEN Scanner

sau

$$D(L,t_p)=\sum_{n=0}^{\infty} g(L,n)p_n \tag{10.44}$$

unde p_n este probabilitatea ca $N_1(t_p) = n$. Funcția costului total este o sumă formată din doi termeni: primul este costul mediu de funcționare al sistemului per unitatea de timp dat de ecuația (10.42), iar al doilea este costul de penalizare asociat cu numărul de piese de schimb. Astfel, costul total se va exprima în modul următor:

$$TC = c(t_p)+\alpha D(L,t_p) \tag{10.45}$$

unde α este un factor demultiplicator. Dacă $\alpha = 0$, atunci nu există nici un cost de penalizare, iar o valoare mare a lui α va determina un cost de penalitate foarte mare, atât pentru lipsa, cât şi pentru excesul stocurilor. Este evident că ciclul optim de întreținere preventivă t_p este o funcție a lui α; totuşi, este mai indicat să fie reprezentat ca o funcție a lui $t_{p\alpha}$. Valorile optime ale lui $t_{p\alpha}$ şi L^* sunt obținute minimizând TC în raport cu $t_{p\alpha}$ şi L.

Se va re-scrie $D(L, t_p)$ astfel:

$$\begin{aligned} D(L,t_p) &= E\left[L-\left(M(t_p)+1\right)+M(t_p)-N_1(t_p)\right]^2 \\ &= \left[L-\left(M(t_p+1)\right)\right]^2 + E\left[N_1(t_p)-M(t_p)\right]^2 \end{aligned}$$

sau

$$D(L,t_p)=\left[L-\left(M(t_p)+1\right)\right]^2 + Var\left[N_1(t_p)\right] \tag{10.46}$$

unde $M(t_p) = E[N_1(t_p)]$ şi $Var[N_1(t_p)]$ este o variația lui $N_1(t_p)$. Înlocuind ecuațiile (10.46) şi (10.42) în ecuația (10.45) se va obține :

$$TC=\left[c_f M(t_p)+c_p\right]/t_p + \alpha Var\left[N_1(t_p)\right]+\alpha\left[L-\left(M(t_p)+1\right)\right]^2 \tag{10.47}$$

Numărul optim de piese de schimb la începutul unui ciclu de întreținere preventivă este obținut prin $\partial TC/\partial L = 0$ astfel:

$$\frac{\partial TC}{\partial L} = 2\alpha\left[L-\left(M(t_p)+1\right)\right]=0$$

Scanned with OKEN Scanner

sau

$$L^* = 1 + M(t_p) \tag{10.48}$$

Acesta este un rezultat aşteptat şi intuit, atâta timp cât se ştie că numărul optim de piese de schimb trebuie să fie egal cu numărul de reparaţii (avarii) aşteptate pe durata unui ciclu de întreţinere preventivă.

Similar, mărimea optimă a unui ciclu de întreţinere preventivă pentru o valoare dată a lui α este obţinută prin $\partial TC / \partial t_p = 0$, rezultând :

$$\frac{\partial c(t_p)}{\partial t_p} + \alpha \frac{\partial V(t_p)}{\partial t_p} = 0 \tag{10.49}$$

unde

$V(t_p) = Var(N_1(t_p))$.

Valoarea optimă a lui $t^*_{p\alpha}$ se obţine prin rezolvarea ecuaţiei (10.49).

EXEMPLUL 10.7

Paletele unui compresor de înaltă presiune sunt supuse la uzură. Durata de uzare a unei palete este evaluată în funcţie de amplitudinea şi frecvenţa (valoarea lui AF) din timpul testelor vibratorii de uzură. Dacă o paletă prezintă nişte valori AF neobişnuit de scăzute, este înlocuită pentru a se evita cedarea ei datorită uzurii. Atâta timp cât costul de efectuare a testului de uzură este unul ridicat, utilizatorii unor astfel de compresoare aplică de regulă un program de întreţinere preventivă pentru a înlocui paletele, program ce se bazează pe numărul orelor de funcţionare. Costul înlocuirii unei palete la sfârşitul unui ciclu de întreţinere preventivă este de 250 RON, în timp ce costul pentru înlocuirea ei în timpul unui ciclu este de 1000 RON. Intervalul de timp dintre două avarii succesive este exprimat de distribuţia Erlang în două etape cu un parametru λ = 0,005 avarii pe oră. Presupunând că α = 0,8, care este valoarea optimă a numărului de piese de schimb şi a intervalelor de întreţinere preventivă care minimizează costul total?

Rezolvare

Funcţia distribuţiei Erlang în două etape este:

$f(t; \lambda) = \lambda^2 t e^{-\lambda t}$

Scanned with OKEN Scanner

Numărul aşteptat de avarii în cadrul ciclului de întreţinere preventivă t_p este:

$$M(t_p)=\frac{1}{2}\lambda t_p-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}e^{-2\lambda t_p} \qquad (10.50)$$

În acelaşi timp, $c(t_p)$ este:

$$c(t_p)=\frac{c_p}{t_p}+\frac{1}{2}\lambda c_f-\frac{1}{4}\frac{c_f}{t_p}+\frac{c_f}{4t_p}e^{-2\lambda t_p} \qquad (10.51)$$

Variaţia numărului de avarii este:

$$Var(N(t_p))=\frac{1}{4}\lambda t_p+\frac{1}{16}-\frac{1}{2}\lambda t_p e^{-2\lambda t_p}-\frac{1}{16}e^{-4\lambda t_p} \qquad (10.52)$$

Înlocuind ecuaţiile (10.51) şi (10.52) în ecuaţia (10.49), se obţine:

$$\frac{-c_p}{t_p^2}+\frac{c_f}{4t_p^2}-\frac{c_f}{4}e^{-2\lambda t_p}\left(\frac{2\lambda t_p+1}{t_p^2}\right)+$$

$$+\alpha\left[\frac{\lambda}{4}-\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda t_p}(1-2\lambda t_p)+\frac{1}{4}\lambda e^{-4\lambda t_p}\right]=0$$

sau

$$e^{-0,001t_p}\left[t_p^3-10t_p^2-12.500t_p-1.250.000\right]+5t_p^2\left(1+e^{-0,02t_p}\right)=0$$

Soluţia ecuaţiei de mai sus este:

$t^*_{p\alpha}=140,568$ *ore*

Numărul corespunzător al avariilor în timpul unui ciclu de întreţinere preventivă este 0,163. De aceea numărul optim de piese de schimb este de 1,163.

Dificultatea în folosirea ecuaţiei (10.49) se datorează estimării variaţiei numărului aşteptat de avarii în cadrul ciclului preventiv t_p. Varianta asimptotică funcţie de medie şi abaterea standard este:

$$Var[N(t_p)]=\frac{\sigma^2}{\mu^3}t_p \qquad (10.53)$$

Exemplul 10.8

Valvele (supapele)de înaltă presiune din oţel inoxidabil sunt folosite de obicei la instalaţiile chimice pentru a controla scurgerea gazului sintetic uscat (combinaţie 3 la 1 de azot şi oxigen cu 4% amoniac). Se presupune că timpii de defectare urmează o distribuţie Weibull de forma :

Scanned with OKEN Scanner

$$f(t)=\frac{\gamma}{\theta}t^{\gamma-1}e^{\frac{-t^{\gamma}}{\theta}} \qquad t>0, \quad \theta>0.$$

Valorile estimate ale lui γ şi θ sunt 2 şi respectiv 50 (măsuri în sute). Preţul înlocuirii la o avarie este 500 RON iar cea a unei înlocuiri preventive este 300 RON. Parametrul de scara pentru funcţia de penalitate este 3,5. Să se determine intervalul optim de întreţinere preventivă şi numărul optim de piese de schimb din timpul intervalului de întreţinere.

Rezolvare

Pentru că este dificil să se estimeze numărul de defectări aşteptate în timpul t_p, se va folosi forma asimptotică a funcţiei de reînnoire :

$$M(t_p)=\frac{t_p}{\mu}+\frac{\sigma^2-\mu^2}{2\mu^2}$$

unde μ şi σ sunt media şi deviaţia standard a distribuţiei timpilor de defectare. Media şi variaţia distribuţiei Weibull sunt :

$$\mu=\theta^{\frac{1}{\gamma}}\Gamma\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)=(50)^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)=6{,}27$$

$$\sigma^2=\theta^{\frac{2}{\gamma}}\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{\gamma}\right)-\left(\Gamma\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)\right)^2\right]$$

sau

$$\sigma^2=50[1-0{,}7854]=10{,}73$$

şi

$$\sigma=3{,}275 \text{ ore.}$$

Astfel:

$$M(t_p)=\frac{t_p}{6{,}27}-0{,}363 \qquad (10.54)$$

Variaţia numărului aşteptat de defectări este :

$$Var[N(t_p)]=0{,}0435t_p \qquad (10.55)$$

Înlocuind ec.(10.54) în ec.(10.42) se obţine :

$$c(t_p)=\frac{c_p}{t_p}+\frac{c_f}{t_p}\left[\frac{t_p}{6{,}27}-0{,}363\right]$$

Scanned with OKEN Scanner

$$c(t_p) = \frac{118,5}{t_p} + 79,74 \qquad (10.56)$$

Înlocuind ec.(10.55) şi (10.56) în ec.(10.49) rezultă :

$$\frac{-118,5}{t_p^2} + (3,5) \times 0,0435 = 0 \quad , \textit{deci:}$$

$t^*_{p\alpha} = 27,898$ *sau* 2.789,8 ore.

Numărul optim de piese de schimb este :

$L^* = 1 + M(t^*_{p\alpha}) = 1 + 4,086 = 5,086$ *valve.*

10.5.1 NUMĂRUL PISELOR DE SCHIMB ŞI DISPONIBILITATEA

Când sistemele furnizează servicii de importanță deosebită se impune să avem la îndemână piese de schimb în stoc care să asigure un nivel de disponibilitate specific sistemului. În acest caz se va utiliza formula de pierderi Erlang pentru a estima numărul de piese de schimb din timpul perioadei cu rată constantă de defectare. Formula este de forma /9/:

$$\overline{A}(s,a) = \frac{a^s / s!}{\sum_{k=0}^{s} (a^k / k!)}$$

unde:

$\overline{A}(s,a)$= starea de indisponibilitate a sistemului când numărul de piese de schimb la îndemână este s şi numărul de unități sub reparare este a,

a - numărul unităților sub reparare,

s - numărul pieselor de schimb aflate la îndemână.

$A(s, a) = 1 - \overline{A}(s,a)$ = disponibilitatea sistemului.

Numărul unităților aflate în reparare depinde de totalul numărului de unități în serviciu, rata de reparare şi timpul mediu anticipat pentru obținerea pieselor de schimb.

Fie N numărul total al unităților pentru care este nevoie să avem piese de schimb în scopul menținerii unui nivel de disponibilitate dat. Se presupune că rata de reparare este de R unități per unitatea de timp, l este timpul anticipat şi a numărul unităților aflate în reparare. Astfel, numărul pieselor de schimb s necesare obținerii unei

Scanned with OKEN Scanner

disponibilități de un anumit nivel dat poate fi obținut prin înlocuirea valorilor lui a şi $A(s, a)$ în formula de pierdere a lui Erlang şi rezolvarea ei în raport de s.

Grup de întreținere. Întreținerea preventivă se limitează la ideea schimbării componentelor unui sistem, una câte una într-un interval de timp care duce la minimizarea costului de întreținere sau la păstrarea un nivel acceptabil de disponibilitate a sistemului. Prin studierea legăturii dintre costurile întreținerii preventive şi întreținerea corectată s-a arătat /9/ că optimizarea timpului pentru întreținerea preventivă nu se face la întâmplare şi că există o politică de optimizare unică cu condiția ca distribuția timpului de defectare să fie de tip *RDC* (rata de defectare crescătoare). În situațiile în care mai multe utilaje sau maşini similare îndeplinesc aceeaşi funcție (cum ar fi: XEROX-ul sau o grupă identică de vehicule de transport) este mai avantajos, din punct de vedere economic, să se folosească întreținerea preventivă pe grup de produse, maşini sau vehicule, în acelaşi timp. Similar cazului anterior (o singură componentă), interesează determinarea intervalului optim de întreținere preventiva a acestui grup.

Se consideră un grup de n maşini funcționabile, independente între ele, care sunt deteriorabile. Costul reparației este compus dintr-un cost fix pentru fiecare reparație şi un cost variabil pentru fiecare maşina. Costul de reparație pentru fiecare maşina în parte scade atunci când numărul maşinilor în curs de remediere creşte, în timp ce producția scade datorită defectării maşinilor. Fie $N(t)$ numărul de maşini operaționale într-un timp t şi $F(t)$ - distribuția timpilor de defectare (identică pentru toate maşinile). Atunci distribuția lui $N(t)$ este:

$$P[N(t) = n] = \binom{N}{n}[1-F(t)]^n [F(t)]^{N-n} \qquad (10.57)$$

unde:

$PN(t)= n$ – probabilitatea ca numărul maşinilor funcționabile într-un timp t să fie egal cu N.

Distribuția lui $N(t)$ este binomiala în sensul relației (10.58):

$$E[N(t)] = N[1 - F(t)] \qquad (10.58)$$

Se presupune că maşinile defecte sunt reparate la un preț fix c_0 şi un preț variabil de c_1 , pentru fiecare maşină. Dacă o maşina defectă nu este reparată atunci se înregistrează o pierdere de producție c_2 pentru fiecare unitate de timp a fiecărei maşini, dar cum producția va creşte atunci când timpul estimat reparațiilor şi costul remedierilor scad, atunci exista un timp optim (timp de întreținere) care minimizează costul total estimat pe unitate.

Scanned with OKEN Scanner

Conform /9/ se are în vedere faptul că o politică de întreținere aleatoare planificată care arată că repararea este în curs de efectuare atunci când numărul mașinilor operaționale ajunge cu certitudine la nivelul n. Timpul pentru a atinge acest nivel este o variabilă aleatoare notată cu T , cu *f.d.c. -ul* notat $G(t)$. T reprezintă al n-lea ordin statistic al variabile aleatoare N. Așa încât, costul de reparare estimat per ciclu (R_c) este :

$$R_c = c_0 + c_1 \int_0^\infty [N - E[N(t)]] dG(t)$$

sau

$$R_c = c_0 + c_1 N \int_0^\infty F(t)\, dG(t) \tag{10.59}$$

Pierderea de producție pe fiecare ciclu, P_c, este :

$$P_c = c_2 \int_0^\infty [N - E[N(t)]] \overline{G}(t) dt$$

sau

$$P_c = c_2 N \int_0^\infty F(t) \overline{G}(t)\, dt \tag{10.60}$$

unde $\overline{G}(t) = 1 - G(t)$. Costul total estimat pe unitatea de timp este :

$$c[G(t)] = \frac{R_c + P_c}{\int_0^\infty t\, dG(t)} \tag{10.61}$$

Conform /9/, politica de planificare optimă ce minimizează ecuația (10.61) este deterministă, adică:

$$G(t) = \begin{cases} 0 & daca \quad t \le t_0 \\ 1 & daca \quad t > t_0 \end{cases}$$

unde t_0 este timpul planificat pentru întreținerea de grup. Relația (10.61) poate fi re-scrisă astfel :

Scanned with OKEN Scanner

$$c(t_0) = \frac{1}{t_0}[c_0 + c_1 NF(t_0) + c_2 N \int_0^{t_0} F(t)dt]. \qquad (10.62)$$

Din ecuația (9.62) rezultă că $c(0) = \infty$ și $c(\infty) = c_2 N$. Aceasta implică faptul că la planificarea optimală costul pe unitatea de timp este mai mic decât $c_2 N$. Planul de optimizare poate fi exprimat sumar astfel:

Se presupune că $F(t)$ este continuă, derivata lui $f(t)$ există și rata defectării pe mașină este λ. Se presupune că $-f'(t)/f(t) < c_2/c_1$ pentru $t \geq 0$. Atunci:

1) Dacă $c_2/\lambda > c_0/N + c_1$, atunci există și un timp optim planificat notat cu t_o^* unic și finit ce satisface ecuația:

$$c_1 t_0 f(t_0^*) + c_2 t_0 F(t_0^*) - c_1 F(t_0^*) - c_2 \int_0^{t_0} f(t)dt = c_0 / N \qquad (10.63)$$

Costul minim pe unitatea de timp se obține cu relația:

$$c(t_0^*) = c_1 NF(t_0^*) + c_2 NF(t_0^*) \qquad (10.64)$$

2) Dacă $t_0^* = \infty$ atunci condiția 1 este realistă. De exemplu, dacă distribuția timpilor de defectare presupusă exponențială cu o rată de defectare λ, atunci condiția anterioară $-f'(t)/f(t) < c_2/c_1$ devine $(c_2/\lambda) > c_1$, care se traduce prin media de pierdere a producției per mașină. Mai mult chiar, condiția $c_2/\lambda > c_0/N + c_1$ implică faptul că media pierderii de producție pentru fiecare mașina este mai mare decât costul total de reparare per mașină când se aplică metoda reparării în grup de N mașini. De aceea, este rezonabil să planificăm reparațiile înainte de căderea tuturor mașinilor.

S-a arătat anterior că atunci când o mașina are o rată de defectare constantă, politica optimă de întreținere preventivă este de a înlocui componenta după defectare. Totuși, când un număr de mașini identice N, fiecare având o rată de defectare constantă λ, condiția de existență a unei politici optime este dată de $c_2/\lambda > c_0/N + c_1$. Prin înlocuirea *f.d.p.* -lui distribuției exponențiale în ec.(10.63) se obține :

$$(X^*+1)e^{-X^*} = A \qquad (10.65)$$

unde

$$X^* = \lambda t_0^* \qquad (10.66)$$

Scanned with OKEN Scanner

şi

$$A = \frac{c_2/\lambda - (c_0/N + c_1)}{c_2/\lambda - c_1} \tag{10.67}$$

Ecuația (10.65) reprezintă numărul estimat de maşini a fi reparate în cazul politicii optime. Costul estimat pentru acest caz este :

$$c(t_0^*) = c_2 N + N\lambda(c_1 - c_2/\lambda)e^{-\lambda t_0^*} \tag{10.68}$$

EXEMPLUL 10.9

Secția mecanică dintr-o societate comercială are 10 maşini identice, controlate de calculatoare numerice. Fiecare maşina are o rată de defectare constantă de 0,0005 pe oră. Costul reparării include o parte fixă de 150 RON şi o parte variabilă de 100 RON per maşină. Să se determine planul optim de întreținere preventivă şi costul aferent.

Rezolvare

Rata de defectare a maşinilor are o caracter exponențial, cu f.d.p. -ul de forma :

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

Costul reparării are 2 componente: c_0 =150 RON şi c_1=100 RON. Pierderea suferită este c_2=200 RON per oră. Se verifică condiția $(c_2/\lambda) > c_0/N + c_1$ pentru a vedea dacă există o metoda optimală. Cum

$$\frac{200}{0{,}0005} \rangle \frac{150}{10} + 100,$$

rezultă că există o metodă optimală. Timpul de reparare optim pentru aceste maşini se obține utilizând ecuațiile (10.65) – (10.67), din care se abține :

$$A = \frac{c_2/\lambda - (c_o/N + c_1)}{c_2/\lambda - c_1}$$

sau

$$A = \frac{400.000 - 115}{400.000 - 100} = \frac{399.885}{399.900} = 0{,}9999624.$$

Din ecuația (10.66) rezultă că $X^* = 0{,}0005\ t_0^*$ şi atunci ecuația (10.65) devine:

$$(0{,}0005\ t_o^* + 1)e^{-0{,}0005\ t_o^*} = 0{,}9999624$$

Scanned with OKEN Scanner

iar timpul de reparare optim pentru maşinile defecte este 17,5 ore. Costul corespunzător este :

$$c(17,5) = c_2 N + N\lambda(c_1 - c_2/\lambda)e^{-\lambda t_o^*}$$

$$= 2.000 + 10 \times 0,0005\left(100 - \frac{200}{0,0005}\right)e^{-0,0005 \times 17,5}$$

sau

c(17,5)=17,92 RON.

10.6. INSPECŢIA PERIODICĂ

Folosirea metodei de întreţinere preventivă cu planificare specificată va produce, cu siguranţă, o disponibilitate crescută a sistemului. Pentru a îmbunătăţi fiabilitatea, în special la sisteme critice, un plan de menţinere preventivă este asociat cu unul privind inspecţiile periodice. În asemenea situaţii, starea sistemului este determinată prin inspecţie. Monitorizarea continuă a sistemului este o alternativă a inspecţiei periodice. Metodele de monitorizare continuă sunt prezentate în subcapitolul 10.7. În acest subcapitol se va discuta despre două tipuri de politici privind inspecţiile.

10.6.1 POLITICA OPTIMĂ DE INSPECŢIE

În cadrul acestei politici, starea echipamentului este determinată prin inspecţie. De exemplu calitatea produselor executate de o maşină poate să fie în afara toleranţelor admisibile, ceea ce indică o degradare a maşinii respective (presupunând că alţi factori ce ar putea afecta calitatea produsului nu au suferit modificări).

Atunci când o defectare (sau o degradare) este detectată, echipamentul este reparat sau ajustat şi readus la starea iniţiala de dinaintea defectării. Dacă inspecţia eşuează în detectarea defectării sau degradării echipamentului, atunci va apărea un cost ne-justificat (asociat cu defectarea echipamentului). Acest cost este considerat ca fiind *cost nedetectat*. Obiectivul este de a determina un plan optim de inspecţie ce minimizează costul total pe unitatea de timp în ceea ce priveşte inspecţia, remedierea şi costul nedetectat. Politica de inspectare constă în efectuarea de inspecţii la timpii x_1, x_2, x_3,... până când se va detecta un echipament defect sau deteriorat/degradat. Reparările sunt executate imediat ce se vor detecta aceste defectări/degradări. Intervalele de inspecţie nu sunt neapărat egale dar pot fi reduse la probabilitatea de creştere a defectării. Se vor folosi următoarele definiţii :

Scanned with OKEN Scanner

c_i = costul inspecției *i*,
c_u = costul pe unitate de timp a degradării/defecțiunii ne-detectate,
c_r = costul reparării,
T_r = timpul necesar remedierii,
$f(t)$ = funcția densității de probabilitate (*f.d.p.*) a timpilor de defecare ai echipamentului.

Costul total estimat, per unitatea de timp, va fi :

$$c(x_1, x_2, x_3, ...) = E_c/E_l \tag{10.69}$$

unde E_c și E_l reprezintă costul total estimat pe ciclu respectiv lungimea/mărimea ciclului estimat. În continuare se va ilustra modul de estimare ale lui E_c și E_l.

Se presupune că defectarea echipamentului se produce între oricare 2 momente de inspecție. Dacă defectarea se produce la timpul t_1 (între timpul 0 și x_1), atunci costul ciclului va fi :

$$c_i(1) + c_u(x_1 - t_1) + c_r.$$

Valoarea estimată a acestui cost va fi:

$$\int_0^{x_1} [c_i(1) + c_u(x_1 - t) + c_r] f(t)dt \tag{10.70}$$

Similar, dacă defectarea apare între timpii de inspecție x_1 și x_2, valoarea estimată a costului va fi :

$$\int_{x_1}^{x_2} [c_i(2) + c_u(x_2 - t) + c_r] f(t)dt \tag{10.71}$$

Deci, valoarea estimată a costului total pe ciclu este:

$$\begin{aligned} E_c = & \int_0^{x_1} [c_i(0+1) + c_u(x_1 - t) + c_r] f(t)dt \\ & + \int_{x_1}^{x_2} [c_i(1+1) + c_u(x_2 - t) + c_r] f(t)dt \\ & + \int_{x_2}^{x_3} [c_i(2+1) + c_u(x_3 - t) + c_r] f(t)dt \\ & + ... + \int_{x_j}^{x_{j+1}} [c_i(j+1) + c_u(x_{j+1} - t) + c_r] f(t)dt + ... \end{aligned} \tag{10.72}$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuaţia (10.72) poate fi re-scrisă astfel :

$$E_c = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{x_k}^{x_{k+1}} [c_i(k+1) + c_u(x_{k+1} - t) + c_r] f(t)dt$$

sau

$$E_c = c_r + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{x_k}^{x_{k+1}} [c_i(k+1) + c_u(x_{k+1} - t)] f(t)dt \qquad (10.73)$$

Estimarea mărimii aşteptate a ciclului, E_l, se va face folosind acelaşi algoritm de estimare ca al costului total pe ciclu, rezultând :

$$\int_0^{x_1} [t + (x_1 - t) + T_r] f(t)dt + \int_{x_1}^{x_2} [t + (x_2 - t) + T_r] f(t)dt + ...$$

$$+ \int_{x_j}^{x_{j+1}} [t + (x_{j+1} - t) + T_r] f(t)dt + ...$$

sau

$$E_t = \mu + T_r + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x_{k+1} - t) f(t)dt \qquad (10.74)$$

unde μ reprezintă timpul mediu de defectare al echipamentului.

Înlocuind în ecuaţiile (10.73) şi (10.74) în ecuaţia (10.69), se obţine :

$$c(x_1, x_2, x_3, ...) = \frac{c_r + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{x_k}^{x_{k+1}} [c_i(k+1) + c_u(x_{k+1} - t)] f(t)dt}{\mu + T_r + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x_{k+1} - t) f(t)dt} \qquad (10.75)$$

Planul optim de inspecţie este obţinut prin derivarea ecuaţiei (10.75) în raport de x_1, x_2, x_3, egalând ecuaţiile obţinute cu zero şi în final rezolvând sistemul de ecuaţii.

În continuare se va prezenta o altă procedură de determinare a planului optim de inspecţie /9/ Se defineşte următoarea funcţie reziduală:

$$R(L; x_1, x_2, x_3, ...) = LE_l - E_c \qquad (10.76)$$

Scanned with OKEN Scanner

unde L reprezintă fie estimarea iniţiala a costului minim $c(x_1, x_2, x_3, ...)$, fie o valoare a lui $c(x_1, x_2, x_3, ...)$ obţinută pentru ciclu anterior printr-un proces iterativ. Planul/programul care minimizează funcţia $R(L; x_1, x_2, x_3, ...)$ este acelaşi cu cel care minimizează funcţia $c(x_1, x_2, x_3, ...)$. Procedura de determinare a lui $x_1, x_2, x_3, ...$este următoarea :

Pasul 1: Alegerea unei valori pentru L.
Pasul 2: Alegerea unei valori pentru x_1.
Pasul 3: Generarea unui program pentru $x_1, x_2, x_3, ...$folosind relaţia următoare :

$$x_{i+1} = x_i + \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{f(x_i)} - \frac{c_i}{c_u - L} \qquad (10.77)$$

Pasul 4: Calculul lui R folosind ecuaţia (10.76).
Pasul 5: Repetarea paşilor 2, 3 şi 4 cu diferite valori ale lui x_1 până când se va obţine R_{max}
Pasul 6: Repetarea paşilor de la 1 la 5 cu diferite valori ale lui L până când $R_{max}=0$.

O procedură pentru ajustarea lui L până când va fi identic cu costul minim poate fi obţinută astfel :

$$c(L; x_1, x_2, x_3, ...) = L - \frac{R_{max}}{E_1}$$

EXEMPLUL 10.10

Dacă există o ne-concordanţă între datele obţinute prin măsurători de deformaţii în vederea determinării eforturilor datorate presiunii şi rezultatele unei analize termo-mecanice a secţiunii flexibile a conductelor utilizate în instalaţii chimice, atunci se vor mai efectua şi alte măsurări asupra conductelor folosind tehnica de emisie ultrasonica sau acustică. Această operaţie duce la eliminarea posibilelor scurgeri din conducte sau rupturi a pereţilor exteriori. Se recomandă o inspecţie a conductelor la momentele x_1, $x_2, x_3, ...$ până când apare o ne-concordanţă între rezultatele analizei termo-mecanice şi datele obţinute prin măsurarea deformaţiilor. În acest timp, mentenanţa preventivă sau repararea conductelor îşi desfăşoară cursul normal. Costul unei inspecţii este de 80 RON, costul pe unitatea de timp a nedetectării defectării sau degradării conductelor

Scanned with OKEN Scanner

este de 9 RON/oră şi costul reparării este de 2.000 RON. Timpul necesar reparării unei defecţiuni este de 90 de ore. Timpii de defectare ai conductelor urmăresc o distribuţie Gamma cu următorul f.d.p. :

$$f(t) = \frac{\alpha(\alpha k)^{k-1} \exp[-\alpha t]}{(k-1)!},$$

unde α =1/b, b fiind parametrul de scară. Media distribuţiei este μ=kb. Se consideră k=3 şi μ=1000 de ore. Să se determine primele patru puncte ale planului optimal.

Rezolvare

Substituind parametrii distribuţiei în f.d.p. -ul funcţiei Gamma, se obţine :

$$f(t) = \frac{12{,}65}{10^9} e^{\frac{-3}{1000}t}$$

Folosind algoritmul lui Brender /9/, se vor obţine rezultatele din tabelul 10.7. Planul de inspecţie optim pentru conducte este: x_1=20, x_2=41, x_3=64 şi x_4=89 iar costul corespunzător este de 9,5 RON.

Tabelul 10.7

x_1	x_2	x_3	x_4	*Costul total*
100	*216*	*356*	*530*	*1515,8*
80	*170*	*274*	*396*	*1083,5*
60	*125*	*198*	*280*	*648,5*
40	*82*	*128*	*178*	*312,5*
20	*41*	*64*	*89*	*95,5*

10.6.2. INSPECŢIA PERIODICĂ ŞI MENTENANŢA

Inspecţia periodică cuplată cu întreţinerea preventivă se efectuează, de obicei, la componentele şi sistemele importante cum ar fi: motoarele avioanelor, sistemele de lansare a rachetelor, generatoarele de putere ale spitalelor aflate în stand-by, calculatoarele din domeniul bancar, sistemele de rezervare a biletelor la companiile aeriene, etc. În toate aceste cazuri inspecţia este realizată periodic. Când sunt detectate defectări ale componentelor, acestea fie sunt reparate, fie sunt înlocuite cu unele noi.

Dacă defectarea componentelor nu este detectată în timpul inspecţiei şi sistemul se defectează după aceasta, în timpul funcţionării, vor apărea aşa numitele costuri ne-detectate sau pierderi.

Scanned with OKEN Scanner

Desigur că, inspecţiile făcute mai des vor reduce acest cost suplimentar, dar vor creşte costul total al inspecţiilor. De aceea, este de dorit un plan de inspecţie care să minimizeze costul estimat până la detectarea unei defecţiuni şi de asemenea, să minimizeze costul aferent înlocuirii, la detectarea defectării.

Se consideră un sistem ce este verificat periodic pentru a determina dacă sau nu va necesita o reparaţie sau o înlocuire, în acelaşi timp fiind necesară prevederea timpilor de întreţinere preventivă. Se presupune că, după inspecţie, componenta va avea o aceeaşi durată de viaţă/vârstă ca înainte, cu o probabilitatea p şi că este la fel de bună ca o componentă nouă, cu o probabilitate q.

De interes este estimarea timpului mediu de defectare şi a numărului aşteptat de inspecţii înainte de defectare, dar şi estimarea costului total aşteptat şi a costului pe unitatea de timp până la depistarea unei defecţiuni. De asemenea, interesează numărul optim de verificări care va minimiza costul aşteptat. Se presupune că sistemul care va fi inspectat începe funcţionarea la un moment T=0 şi că inspecţia este efectuată în momentele kT (k=1, 2, 3....) unde T >0 este constant şi determinat anterior. Funcţia de distribuţie cumulativă a timpilor de defectare ai sistemului este $F(t)$ cu media μ, finită.

Defectarea sistemului va fi depistată numai prin inspecţie, iar timpul realizării inspecţiei este de fapt neglijabil în comparaţie cu durata dintre două inspecţii succesive.

Se estimează timpul mediu până la defectarea sistemului /9/, notat cu $\gamma(T,p)$, cu relaţia :

$$\gamma(T,p)=\sum_{j=1}^{\infty}\left\{p^{j-1}\int_{(j-1)T}^{jT} tdF(t)+p^{j-1}q\overline{F}(jT)[jT+\gamma(T,p)]\right\} \qquad (10.78)$$

unde $\overline{F}(t=1-F(t)$.

Primul termen din ec.(10.78) reprezintă timpul mediu până la defectarea sistemului între inspecţiile (j - 1) şi j. Al doilea termen reprezintă timpul mediu până la re-înoirea sistemului la verificarea j, după care acesta se va defecta.

Din ecuaţia (10.78) se obţine:

$$\gamma(T,p)=\frac{\sum_{j=0}^{\infty}p^{j}\int_{jT}^{(j+1)T}\overline{F}(t)dt}{\sum_{j=0}^{p}p^{j}\left\{\overline{F}(jT)-\overline{F}[(j+1)T]\right\}} \qquad (10.79)$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă p=0, atunci sistemul este bun, ca şi unul nou, după fiecare inspecţie şi:

$$\gamma(T,0)=\frac{\int_0^T \overline{F}(t)dt}{F(t)} \tag{10.80}$$

Pe de altă parte, dacă p=1, atunci sistemul va avea aceeaşi viaţă ca înainte de inspecţie şi:

$$\gamma(T,1)=\mu \tag{10.81}$$

Ţinând cont de ecuaţia (10.79), numărul aşteptat de inspecţii înainte de defectare, notat cu $M(T, p)$ se obţine astfel :

$$M(T,p)=\frac{\sum_{j=0}^{\infty} p^j \overline{F}[(j+1)T]}{\sum_{j=0}^{\infty} p^j \left\{\overline{F}(jT)-\overline{F}[(j+1)T]\right\}} \tag{10.82}$$

Când p=0 , atunci :

$$M(T,0)=\frac{\overline{F}(T)}{F(T)} \tag{10.83}$$

Dacă p=1, atunci :

$$M(T,1)=\sum_{j=0}^{\infty}\overline{F}[(j+1)T] \tag{10.84}$$

Presupunând că c_1 reprezintă costul fiecărei inspecţii iar c_2 reprezintă costul nedepistării defecţiunii - care este de fapt costul asociat cu timpul scurs între defectare şi depistarea defecţiunii, pe unitatea de timp. Costul total aşteptat până la depistarea defecţiunii, notat cu $c(T; p)$, este dat de :

Scanned with OKEN Scanner

$$c(T;p) = (c_1 + c_2T)\,[M(T,p) + 1] - c_2\gamma(T,p) \tag{10.85}$$

Înlocuind ecuaţiile (10.79) şi (10.82) în ecuaţia (10.85), rezultă :

$$c(T;p) = \frac{(c_1 + c_2T)\left\{\sum_{j=0}^{\infty} p^j \overline{F}[(j+1)T] + \sum_{j=0}^{\infty} p^j \overline{F}(jT) - \sum_{j=0}^{\infty} p^j \overline{F}(j+1)T]\right\}}{\sum_{j=0}^{\infty} p^j \left\{\overline{F}(jT) - \overline{F}[(j+1)T]\right\}}$$

$$- \frac{c_2 \sum_{j=0}^{\infty} p^j \int_{jT}^{(j+1)T} \overline{F}(t)dt}{\sum_{j=0}^{\infty} p^j \left\{\overline{F}(jT) - \overline{F}[(j+1)T]\right\}}$$

sau

$$c(T;p) = \frac{(c_1 + c_2T)\sum_{j=0}^{\infty} p^j \overline{F}(jT) - c_2 \sum_{j=0}^{\infty} p^j \int_{jT}^{(j+1)T} \overline{F}(t)dt}{\sum_{j=0}^{\infty} p^j \left\{\overline{F}(jT) - \overline{F}[(j+1)T]\right\}} \tag{10.86}$$

Din ecuaţia (10.86) rezultă că $\lim_{T\to 0} c(T;p) = \lim_{T\to\infty} c(T;p) = \infty$, ceea ce implică faptul că există o valoare optimă finită T^* ce minimizează costul total aşteptat $c(T, p)$. În /9/ se arată că :

$$M(T,p) \le \frac{\gamma(T,p)}{T} \le [1 + M(T,p)]$$

În consecinţă:

$$c_1 \frac{\gamma(T,p)}{T} \le c(T,p) \le c_1[1 + M(T,p)] + c_2T \tag{10.87}$$

Scanned with OKEN Scanner

E mai interesantă căutarea unui interval optim de inspecţie ce minimizează costul aşteptat pe unitatea de timp până la detectarea defectării, $c_d(T, p)$. În acest caz, prin derivarea ecuaţiei (10.85) se obţine :

$$c_d(T;p)=\frac{(c_1+c_2T)[M(T,p)+1]-c_2\gamma(T,p)}{T[M(T,p)+1]}$$

sau

$$c_d(T;p)=\frac{c_1}{T}+c_2\left\{1-\frac{\sum_{j=0}^{\infty}p^j\int_{jT}^{(j+1)T}\overline{F}(t)dt}{T\sum_{j=0}^{\infty}p^j\overline{F}(jT)}\right\} \qquad (10.88)$$

Limitele lui $c_d(T, p)$ sunt: $\lim_{T\to 0} c_d(T;p)=\infty$ şi $\lim_{T\to\infty} c_d(T;p)=c_2$. Din ecuaţia (10.88) şi pentru o valoare dată a lui T, rezultă că $c_d(T, p)$ este o funcţie monoton crescătoare de parametrul p, pentru o rată crescătoare de defectare. Aşadar :

$$\frac{c_1+c_2\int_0^T F(t)dt}{T}\le c_d(T;p)\le\frac{(c_1+c_2T)\sum_{j=0}^{\infty}\overline{F}(jT)-c_2\mu}{T\sum_{j=0}^{\infty}\overline{F}(jT)} \qquad (10.89)$$

EXEMPLUL 10.11

Datorită costului ridicat provocat de pierderea de producţie, utilajele de încărcare miniere sunt supuse unui program extins de inspecţie, în special la osiile de susţinere a roţilor. Timpul de defectare al osiilor este exponenţial şi estimat la 0,0005 defecţiuni pe oră. Costul pe inspecţie este de 120 RON şi costul unui defect nedepistat este de 80 RON. Să se determine următoarele :

1- Intervalul optim de inspecţie ce minimizează costul total aşteptat pe unitatea de timp.

2- Intervalul optim de inspecţie ce minimizează costul aşteptat pe unitatea de timp până la depistarea defecţiunii.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare

Cum timpii de defectare au o distribuţie exponenţială în timp, $F(t)=1-e^{-\lambda t}$, *atunci pentru orice valoare a lui p ecuaţia (10.86) se reduce la:*

$$c(T;p)=\frac{c_1+c_2T}{1-e^{-\lambda T}}-\frac{c_2}{\lambda} \qquad (10.90)$$

iar ecuaţia (10.88) se reduce la :

$$c_d(T;p)=\frac{c_1+c_2T-(c_2/\lambda)(1-e^{-\lambda T})}{T} \qquad (10.91)$$

1- Intervalul de inspecţie optim ce minimizează costul total aşteptat pe unitatea de timp este valoare T care minimizează ecuaţia (10.90), adică:*

$$c(T^*;p)=\frac{120+80T^*}{1-e^{-0,0005T^*}}-\frac{80}{0,0005}$$

şi $T^*=78$ ore.

2- Intervalul optim de inspecţie ce minimizează costul aşteptat pe unitatea de timp până la depistarea defecţiunii este obţinut utilizând ecuaţia (10.91) :

$$c_d(T^*;p)=\frac{120+80T^*-\frac{80}{0,0005}(1-e^{-0,0005T^*})}{T^*}$$

sau $T^*=77$ *ore.*

Concluzie: Osiile trebuie inspectate periodic la intervale fixe de 77 de ore.

10.7 CONTROLUL ŞI MONITORIZAREA ON-LINE

Până acum, au fost prezentate întreţinerea preventivă şi modele de inspecţie care determină optimul de întreţinere preventivă şi de intervale de inspecţie, mărimi care minimizează costul total aşteptat, reducerea de timp şi maximizează disponibilitatea sistemului. În multe situaţii practice, este dezavantajoasă o monitorizare continuă a condiţiei sistemului pentru a preveni defectarea lui în orice perioadă de timp. Ultimele descoperiri în domeniul senzorilor, testele nedistructive fizice şi chimice şi tehnicile de măsurare sofisticate au facilitat procesul de monitorizare continuu a performanţelor sistemului. Atunci când la acestea se ataşează şi un microcomputer bazat pe echipamente de control, monitorizarea şi controlul sistemului în totalitate devine mult mai practică şi economică. Senzori folosiţi în monitorizarea componentelor sistemului elimină timpul necesar pentru diagnosticare, reducând timpul necesar efectuării reparaţiilor curente şi testării în scopul verificării calităţii reparaţiei.

Scanned with OKEN Scanner

Informaţiile necesare diagnosticării condiţiei în care se află un echipament sau un sistem include nivel de zgomot, de viteză, de debit, de temperatură, de vibraţie, de poziţie, de repetabilitate, etc. Majoritatea senzorilor şi echipamentele de monitorizare se bazează pe modele vibratorii, electrice, hidraulice, pneumatice, corosive, de uzare, de mişcare ş.a. În continuare vor fi prezentate unele dintre cele mai cunoscute şi utilizate sisteme de diagnosticare şi monitorizare.

10.7.1.ANALIZA VIBRAŢIILOR

Maşinile sau echipamentele produc vibraţii în funcţionare. Fiecare maşina are o anumită vibraţie caracteristică sau *semnătură*, compusă dintr-un număr foarte larg de vibraţii armonice de diferite amplitudini. Efectul de defectare şi uzare a componentelor în aceste vibraţii armonice diferă mult depinzând de contribuţia pe care o are o componentă particulară la *semnătura* globală a maşinii. De exemplu, într-un motor multicilindric vibraţia armonică principală este calculată funcţie de numărul mişcărilor de rotaţie, aşa încât rateurile la aprindere a unuia sau a mai multor cilindri va produce vibraţii puternic diferite faţă de *semnătura* originală a funcţionării motorului, vibraţii ce pot fi detectate prin intermediul unui accelerometru. Acesta este un traductor electromecanic ce produce la ieşire o mărime electrică proporţională cu acceleraţia vibraţiei la care a fost expus. Vibraţia tip *semnătură* a echipamentului depinde de frecvenţa, amplitudinea, viteza, acceleraţia şi panta undei de vibraţie. În general, nu există nici un traductor care să fie capabil să cuprindă o gamă extrem de largă de vibraţii caracteristice. Aşadar, traductoarele sunt proiectate şi executate pentru diferite game de frecvenţe, amplitudini, viteze şi acceleraţii. Pe de altă parte, accelerometrele seismice pot fi folosite pentru monitorizarea vibraţiilor maşinilor electrice care sunt caracterizate prin vibraţiile rulmenţilor utilizaţi şi compensarea lor cu vibraţiile de frecvenţe înalte caracteristice numărului de startere şi de poli ai rotorului.

10.7.2. EMISIA ACUSTICĂ ŞI ÎNREGISTRAREA SONORĂ

Emisia acustică poate fi definită ca energia elastică tranzitorie descărcată în mod spontan de materialele aflate în proces de deformare, de rupere sau în ambele. Energia emisă produce semnale acustice de înaltă frecvenţă. Puterea semnalelor depinde de unii parametrii cum ar fi: rata de deformare, volumul de material participant, magnitudinea încărcării aplicate. Semnalele pot fi detectate de senzori plasaţi la câţiva metri de generatorul de semnal. Majoritatea senzorilor sunt dispozitive piezoelectrice rezonante.

Traductoarele optice pentru emisia acustică au avantajul că pot fi utilizate atât în contact, dar şi în lipsa lui, cu probele la care se fac măsurări şi prezintă un răspuns în

Scanned with OKEN Scanner

frecvenţă de bandă largă. Emisia acustică este utilizată în multe aplicaţii cum ar fi: monitorizarea uzurii sculelor, oboseala materialelor, defecte ale sudurilor, etc.

Înregistrarea sonoră este utilizată pentru a detecta o gama largă de evenimente anormale ce pot să apară în procesele de fabricaţie. Sistemul de înregistrare sonoră identifică o varietate de sunete operaţionale, inclusiv cele staţionare sau de şoc, folosind o tehnică de înregistrare de audio- frecvenţă şi apoi o va compara cu sunete operaţionale normale, aşteptate a se produce în funcţionare.

Sunetele operaţionale sunt captate de un microfon condensator unidirecţional care este amplasat lângă maşina care urmează a fi monitorizată. Atunci când este generat un sunet operaţional anormal, trăsătura caracteristica a semnalului sonor este extrasă şi se va forma un şablon de sunete. Acesta este comparat cu modelul standard, prin tehnici de comparare a modelelor, fiind ales iar cel mai apropiat model de cel standard. Defectul sau eroarea corespunzătoare acestei alegeri este apoi depistat şi diagnosticat.

10.7.3.MONITORIZAREA TEMPERATURII

Creşterea temperaturii componentei sau a echipamentului este în mod frecvent un semnal ce indică posibile probleme apărute în funcţionare. De exemplu, majoritatea defectelor caracteristice motoarelor electrice se datorează căldurii excesive generată de frecarea din rulmenţi. Durata de viaţă a rulmenţilor este dependentă de programul de mentenanţă preventivă şi condiţiile în care aceştia funcţionează. În mod similar, existenţa unei călduri punctiforme la un tablou electric indică faptul că defectarea este iminentă. Aceste puncte "calde" sunt cauzate în cea mai mare parte de curenţii excesivi.

Aşadar, măsurarea variaţiei temperaturii poate fi folosită în mod efectiv în monitorizarea componentelor şi echipamentelor în scopuri caracteristice mentenanţei preventive. Există o varietate de instrumente de măsurare a variaţiei de temperatură, cum ar fi: termometrele cu mercur, termo-cuplele sau pirometre optice, folosite pentru a măsura temperaturi foarte mari. Ultimele descoperiri în domeniul calculatoarelor a făcut posibilă folosirea instrumentelor de măsurare a temperaturii folosind tehnica în infraroşu care face posibil efectuarea de măsurări în locuri dificile şi impracticabile de a introduce instrumente de măsură de contact. Emisia infraroşu are ce mai mica lungime de unda din toată gama de radiaţii şi este vizibile folosind instrumente speciale. În mod cert, intensitatea emisiei infraroşu depinde de temperatura suprafeţei. Aşadar, printr-un detector mobil amplasat în faţa suprafeţei a cărei temperatură dorim să o determinăm, calculatorul o va calcula şi va da un Display color cu distribuţia temperaturii. Acest instrument este practic şi de mare folos mai ales în monitorizarea temperaturii regulatoarelor şi în detectarea pierderii de căldură prin conducte.

Scanned with OKEN Scanner

10.7.4 MONITORIZAREA FLUIDELOR

Analiza echipamentelor destinate fluidelor poate să ne dea informații despre performanțele şi stadiul de uzare a echipamentelor. Monitorizarea poate fi folosită pentru a evalua fiabilitatea şi durata aşteptată de viață ce a mai rămas pentru funcționarea echipamentelor. Pe durata utilizării echipamentelor, se desprind particule foarte mici de metal ce au ca sursă de proveniență părțile imersate în fluid. Aceste particule rămân în fluid şi nu sunt depistate de filtrele echipamentului datorită dimensiunilor foarte mici. Dimensiunea particulelor va creşte odată cu uzura echipamentului. Sunt mai multe metode de identificare a dimensiunilor şi a naturii particulelor. Cele mai folosite metode sunt: *absorbția atomică* şi *emisia spectrografică.*

În cadrul metodei de *absorbție atomică*, are loc arderea unei cantități mici de fluid iar flacăra este analizată printr-o sursa de lumină specifică fiecărui element. Metoda este foarte riguroasă şi se pot depista dimensiuni foarte mici ($0{,}1x10^6$ din unitate). Dezavantajul acestei metode constă în faptul ca este anostă şi necesita un timp îndelungat, dacă natura particulei nu este cunoscută.

Emisia spectrografică este similară absorbției atomice în prima parte care constă în arderea unei cantități mici de fluid. Avantajul clar al acestei metode este faptul că se poate analiza simultan toate cantitățile tuturor materialelor, la o singură ardere. Dezavantajul este că nu poate detecta decât particule de dimensiuni mai mari(până la 10^6 din unitate). Spectrometria nu poate fi utilizată în cazul în care modul de defectare este caracterizat de generarea unor particule foarte mari din suprafața ce se deteriorează rapid.

10.7.5 MONITORIZAREA COROZIUNII

Coroziunea este un mecanism de degradare a multor componente metalice. Monitorizarea ratei de degradare - mărimea corodării - are un efect major asupra planurilor de mentenanță preventivă şi de disponibilitate a sistemului. Există multe tehnici de monitorizare a coroziunii cum ar fi: cea vizuală, monitorizarea ultrasonică a stratului, zgomotul electrochimic, măsurarea impedanței şi activarea stratului subțire *TLA* (Thin Layer Activation). Aceasta din urmă este cea mai folosită şi cea mai avantajoasă tehnică one-line de monitorizare. Principiul acestei metode este că traiectoria unui radio-isotop este generată în stratul subțire(de suprafață) al componentei supuse studiului de o rază ionică de mare energie. Pierderile de material datorate coroziunii de pe suprafața componentei pot fi rapid detectate pe un simplu monitor cu raze γ. Repunerea în funcțiune este convertită în găsirea directă a unei adâncimi a

Scanned with OKEN Scanner

coroziunii şi, în cazul în care coroziunea nu este localizată cu precizie, de găsirea unei măsurători, cu un înalt coeficient de siguranţă, a pierderilor de material de pe suprafaţă.

10.7.6 ALTE METODE DE DEPISTARE

Componentele şi sistemele pot fi monitorizate în scopul executării întreţinerii şi a înlocuirilor/reparaţiilor prin observarea unor caracteristici critice folosind o varietate largă de senzori şi microsenzori. De exemplu, sistemele pneumatice şi hidraulice pot fi monitorizate prin observarea presiunii, densităţii de fluid, ratei de curgere şi a schimbării de temperatură. În mod similar, componentele electrice ale unui sistem pot fi monitorizate observând modificările de rezistentă, capacitate, voltaj, curent, temperatură şi intensitate de câmp magnetic.

Componentele mecanice ale sistemelor pot fi monitorizate măsurând: viteza, încărcarea, mişcarea unghiulară, şocurile de tip impuls, temperatura şi forţa. Ultimele descoperiri permit observarea unor caracteristici ce au fost până acum cu greu sau chiar imposibil de observat. În acest moment, microsenzorii cu siliciu s-au dezvoltat astfel încât au depăşit limitele simţurilor umane privind vederea, auzul şi simţul. În privinţa mirosului, aparatele de măsură sunt încă în curs de dezvoltare.

Perfecţionarea senzorilor şi reducerile semnificative de cost ale acestora au avut ca rezultat utilizarea lor în foarte multe şi variate domenii. De exemplu, multe din mărcile moderne de automobile sunt echipate cu sisteme electronice de diagnosticare care ne indică momentele în care trebuie să ducem maşina la service, să-i schimbăm uleiul, filtrul ş.a.

În fine, un lucru foarte important este acela că ultimele descoperiri în domeniul microcalculatoarelor, microprocesoarelor şi senzorilor pot oferi beneficii deosebite în domeniul întreţinerii preventive şi a înlocuirii/reparării. Multe componente, sisteme şi instalaţii întregi pot fi acum monitorizate în mod continuu pentru a determina sursa disfuncţionalităţilor şi a potenţialelor defectări. Mai mult, măsurătorile on-line, analizele şi controlul proprietăţilor şi caracteristicilor, ce se fac în mod obişnuit off-line, au ca rezultat o creştere semnificativă a numărului de componente şi sisteme monitorizate, mult mai multe ca în sistemul off-line.

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 11

STUDII DE CAZ

I. STUDII DE CAZ REZOLVATE

În prima parte a acestui capitol vor fi prezentate o serie de studii complexe de caz soluționate, datele fiind preluate din exploatarea în timp a sistemelor respective /9/.

CAZUL1: SUBSISTEMUL DISTRIBUITOR AL MACARALEI

INTRODUCERE

Macaralele sunt considerate a fi primul mijloc de transfer a încărcăturilor în porturi. Condițiile de operare ale unei macarale depind de tipul şi de greutatea încărcăturilor de transferat, de coordonatele punctelor de ridicare şi descărcare, de intensitatea fluxurilor de încărcare/descărcare, de locația macaralei şi de efectele mediului (cum ar fi: temperatura, vântul, zăpada, umiditatea şi conținutul de praf).

Coordonatele punctelor de ridicare şi descărcare precum şi dimensiunile generale ale încărcăturilor determină principalele dimensiuni ale macaralei. Coordonatele sunt date cu o toleranță cunoscută care determină precizia cu care încărcăturile sunt transferate. Toleranțele afectează mecanismele conducătoare şi funcționarea lor.

Porturile sunt de obicei prevăzute cu containere manevrate de podul rulant al macaralei. Figura.11.1 prezintă schema podului rulant al macaralei. În timpul descărcării

unui vas tip cargou macaraua ridică câte un container din vas şi îl plasează pe şasiul transportorului, fiind mai apoi dus la o locaţie desemnată în port.

Pentru încărcarea vasului cu containere transportorul aduce containerul în zona de acţiune a macaralei, iar mai apoi acesta este ridicat de macara şi plasat pe vas într-o poziţie stabilită. Podul rulant este de obicei dotat cu un dispozitiv de împrăştiere(de reglare a locaţiei) automat, cu telecomandă, astfel încât să fie permisă o încărcare şi descărcare rapidă, în siguranţa şi eficientă, a containerelor. Sistemul de împrăştiere este deservit de pompe hidraulice care produc puterea cerută de operaţiile ce le execută. Aceste pompe activează cilindrii hidraulici ai sistemului telescopic, ai patinelor de ghidare-inversare a mişcării şi ai menghinelor de prindere/apucare. Sistemul telescopic al dispozitivului de împrăştiere este folosit pentru adaptarea lungimii împrăştietorului la mărimile diferite ale containerelor.

Patinele de ghidare sunt ghidaje cu vârfuri retractabile care ajută operatorul la coborârea sistemului de împrăştiere spre container. Când se doreşte ridicarea unui container, trebuiesc legate cele patru menghine de prindere (cate una la fiecare colţ al containerului). Dacă una din menghine nu este prinsă sau nu funcţionează corect, ca o măsură de siguranţă, nici una din celelalte trei menghine nu poate fi prinsă. Menghinele sunt puse pe poziţia *încuiat* sau *descuiat* de o unitate de putere hidraulică.

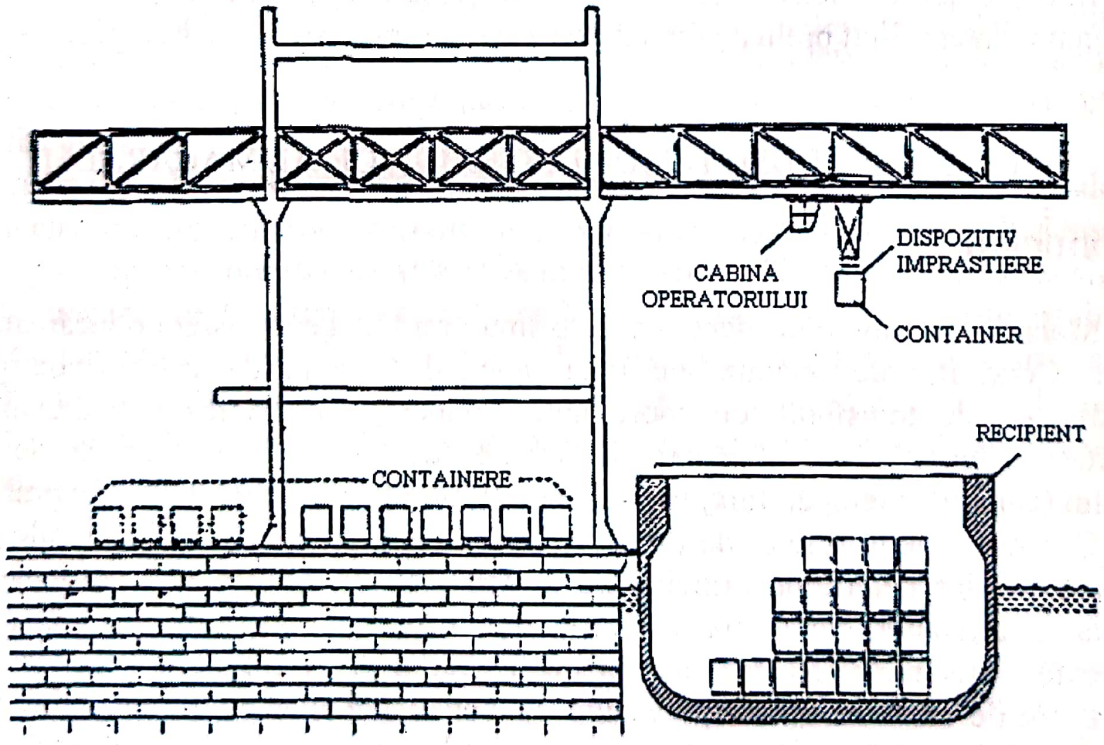


Figura 11.1 Schema podului rulant

Scanned with OKEN Scanner

O altă componentă decisivă a dispozitivului de împrăştiere este comutatorul de limitare. Funcţia comutatorului este de a modifica curentul electric al unei maşini, sau a unei piese din echipament, în vederea limitării mişcării acesteia. Comutatoarele menghinelor sunt localizate pe un cilindru hidraulic. Sunt două comutatoare pentru fiecare menghină pentru a finaliza acţiunea cilindrului hidraulic, atunci când se doreşte a fi pe una din poziţiile *încuiat* sau *descuiat*. Comutatoarele sunt folosite de asemenea la sistemele telescopice pentru finalizarea extinderii sau contracţiei împrăştietorului, atunci când se ajunge la înălţimea dorită. În figura 11.2 este prezentată imaginea plană a sistemului hidraulic la un sub-sistem de împrăştiere.

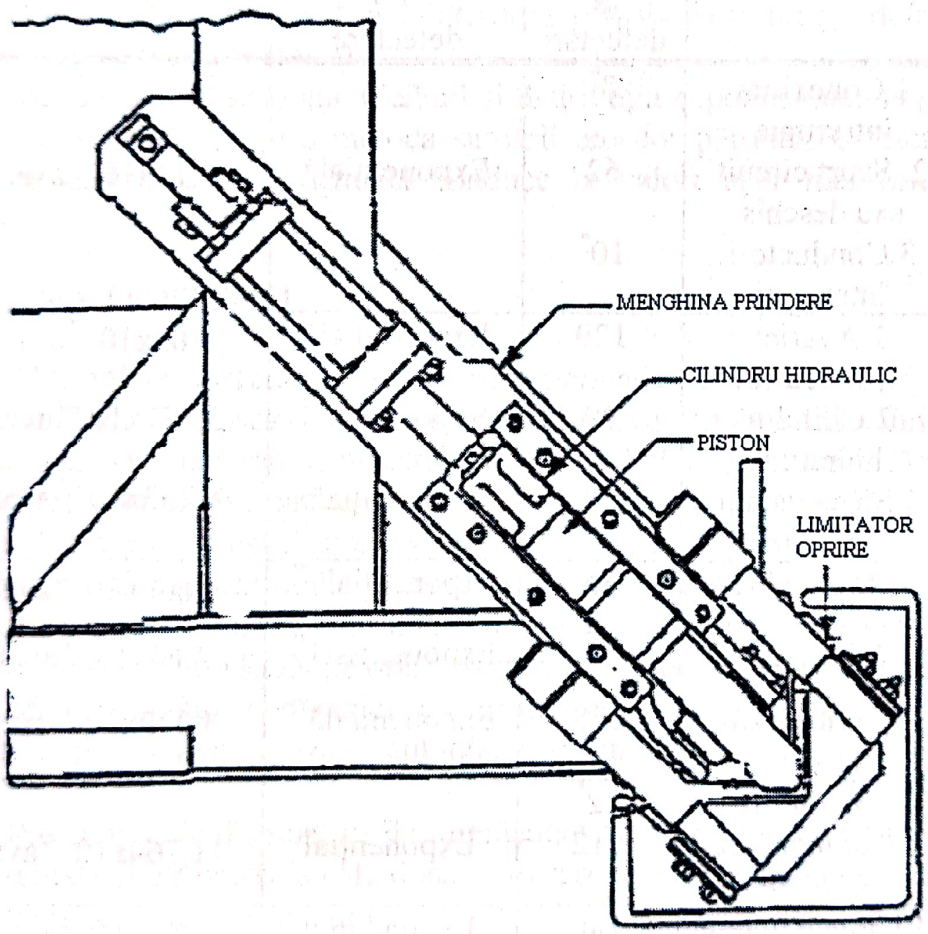


Figura 11.2 Sistemul hidraulic al dispozitivului de împrăştiere

Scanned with OKEN Scanner

Menţinerea în stare de funcţionare normală a şase macarale la o companie portuară indică faptul că defectările privind împrăştietorul şi componentele sale reprezintă aproximativ 65% din defectările macaralei. Componentele de bază ale împrăştietorului sunt prezentate în tabelul 11.1. Tabelul prezintă de asemenea numărul defectărilor, tipul distribuţiei timpilor de defectare şi parametrii distribuţiei ca estimări ale datelor de defectare.

Tabelul 11.1 Distribuţiile timpilor de defectare la componentele disp. de împrăştiere

Tipul defectului	Componentele	Numărul de defectări	Distribuţia timpilor de defectare	Parametrii de distribuţie
A. Electric	1.Conexiuni întrerupte	8*	–	
	2. Scurt circuit sau deschis	62	Exponenţială	$7,14x10^{-4}$ avarii/h
	3.Conductori întrerupţi	10*	–	
B. Patine de ghidare	1.Avariat (înlocuit)	129	Exponenţială	$1,03x10^{-3}$ avarii/h
	2.Cilindru hidraulic	29	Exponenţială	$3,571x10^{-4}$ avarii/h
	3.Mecanismul ghidare	44	Exponenţială	$8,333x10^{-4}$ avarii/h
C. Menghine prindere	1.Menghine	85	Exponenţială**	$6,666x10^{-4}$ avarii/h
	2.Cilindru	55	Exponenţială**	$4,64x10^{-4}$ avarii/h
	3.Comutatoare limitare	178	Exponenţială**	$5,319x10^{-4}$ avarii/h
D. Sistem telescopic	1.Cilindrii	12*	–	–
	2.Comutatoare limitare	112	Exponenţial	$11,764x10^{-4}$ avarii/h
E. Sistem hidraulic	1.Unitate putere	146	Exponenţial	$12,5x10^{-4}$ avarii/h
	2.Ţevi hidraulice	45	Exponenţial	$8,33x10^{-4}$ avarii/h
	3.Fiting (altele faţă de unitatea putere)	32	Exponenţial	$9,756x10^{-4}$ avarii/h

Scanned with OKEN Scanner

F. Şasiu (structural)	1.Structura principală	5*	–	–
	2.Întăriturii	7*	–	–
	3.Guşeu	6*	–	–
	4.Întăriturii placa bază	11*	–	–
G. Bloc conducător	1.Carcasa	6*	–	–
	2.Menghine	10*	–	–
	3.Conmutatoare limitare	18*	–	–

* - sunt date insuficiente pentru a determina distribuţia în timp a defectelor (evenimente rare în timp de 9 ani de studii)

** - amândouă, şi distribuţia Weibull şi distribuţia exponenţială, se potrivesc datelor de defectare. Comparaţia prin metoda sumării erorilor pătratele(a celor mai mici pătrate) arată că distribuţia exponenţială conduce la valori uşor mai mici decât distribuţia Weibull.

EXPUNERA PROBLEMEI

Macaralele operează continuu pe o perioada de 10 ore pe zi, inclusiv weekend-urile. Când un vas soseşte în port pentru a încărca sau descărca, funcţie de volumul de muncă, una sau mai multe macarale intră imediat în funcţiune. Deşi dispozitivele de împrăştiere sunt interschimbabile între macarale, de obicei se utilizează unul şi acelaşi la fiecare dintre ele. Acest dispozitiv are un timp mediu de reparaţie de două ore când se defectează, independent de ce tip de defecţiune apare, tariful reparaţiei fiind constant. O defectare a dispozitivului de împrăştiere conduce la întârzierea vasului care se traduce într-un cost de 10.000 RON pe oră. Costul reparaţiilor este de 200 RON pe oră.

Managementul companiei este interesat în alegerea uneia din următoarele alternative pentru a minimiza costul total al sistemului:

1. Procurarea de dispozitive de împrăştiere de rezervă la un cost de 100.000 RON pe unitate şi atribuirea a câte două la fiecare macara. Durata de viaţă aşteptată a unui împrăştietor este de 5 ani.
2. Creşterea numărului de persoane ce compun echipa de service pentru a reduce timpul de reparaţii la o oră. Aceasta va creşte costul reparaţiei la 400 RON pe oră.

Se vor analiza aceste două alternative şi se va face recomandarea de rigoare .

Scanned with OKEN Scanner

SOLUŢIE

Datele de defectare ale fiecărei componente critic ale dispozitivului sunt analizate, distribuţiile timpilor de defectare şi parametrii respectivi fiind prezentaţi în tabelul 11.1. Se construieşte diagrama bloc de fiabilitate a dispozitivului, prezentată în figura 11.3. S-a folosit notaţia *Xn* pentru referinţa la componenta *n*, la tipul de defectare *X*. De exemplu, *C3* se refera la comutatoare de limitare ale menghinelor de prindere (vezi tabelul).

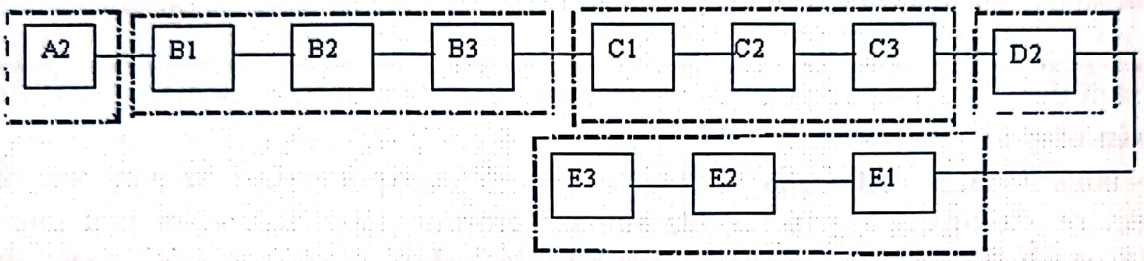


Fig. 11.3 Diagrama bloc de fiabilitate a dispozitivului de împrăştiere

În construcţia diagramei bloc s-a renunţat la componentele care prezintă defectări rare. Folosind ecuaţia (3.7) se dezvoltă o expresie pentru fiabilitatea dispozitivului împrăştietor de forma :

$$R_s(t) = \exp\left[-\left(\lambda_{A2} + \sum_{i=1}^{3}\lambda_{Bi} + \sum_{i=1}^{3}\lambda_{Ci} + \lambda_{D2} + \sum_{i=1}^{3}\lambda_{Ei}\right)t\right] \qquad (11.1)$$

sau

$$R_S(t) = \exp[-8{,}831\times10^{-3}\,t] \qquad (11.2)$$

Rata de defectare a dispozitivului este:

$h_s(t) = 8{,}831\text{x}10^{-3}$ defectări pe oră.

Presupunând că mentenanţa preventivă este executată la timpul planificat astfel încât să nu fie întreruptă funcţionarea normală a macaralei, atunci disponibilitatea macaralei este obţinută substituit: $w^*(s)\lambda/(s+\lambda)$ şi $g^*(s)=\mu/(s+\mu)$ în ecuaţia (3.41) sau folosind direct ecuaţia (3.63). Aşadar,

Scanned with OKEN Scanner

$$A(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda+\mu)t}$$

sau

$$A(t) = \frac{0,5}{8,831 \times 10^{-3} + 0,5} + \frac{8,831 \times 10^{-3}}{8,831 \times 10^{-3} + 0,5} e^{-(8,831\times10^{-3}+0,5)t}$$

$$A(t) = 0,9826+0,017355e^{-0,50883t} \tag{11.3}$$

Timpul mediu de disponibilitate al macaralei în timpul celor zece ore de funcționare pe zi este obținut din ecuația (3.69) astfel:

$$A(10) = \frac{1}{10}\int_0^{10} A(t)dt$$

$$A(10) = \frac{1}{10}\left[0,9826\ t - 0,034107659\ \ e^{-0.50883\ t}\right]_0^{10}$$

$$A(10) = 0,9859897$$

Dacă media timpului de reparare este de 2 ore, costul de ne-funcționare al sistemului curent, în care un singur dispozitiv de împrăştiere este repartizat pe fiecare macara în parte, poate fi calculat astfel:

Costul curent al timpului de ne-funcționare =

$$= [1\text{-}A(10)]\times 10.200 = 142,905 \text{ RON/oră} \tag{11.4}$$

În continuare se vor investiga alternativele 1 şi 2. Rata de reparare pentru alternativa 1 este de 0,5 reparații/oră. Cele două dispozitive de împrăştiere vor funcționa ca un sistem de rezervă, astfel unul este folosit în timp ce al doilea nu este în operare iar rata de defectare este 0. Când primul împrăştietor se strică el merge la reparat şi al doilea împrăştietor devine funcțional. Aşadar, se vor folosi ecuațiile (3.111) şi (3.112) pentru a obține:

$$\dot{P}_1(t) = -8,831\times10^{-3}P_1(t) + 0,5P_2(t) \tag{11.5}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\dot{P}_2(t) = -1{,}508831P_2(t) - 0{,}991169P_1(t) + 1 \qquad (11.6)$$

Rezolvând ecuaţiile (11.5) şi (11.6) rezultă :

$P_1(t) = 0{,}982632 + 0{,}00868e^{-0{,}50015t}$

$P_2(t) = 0{,}016329 - 0{,}016037e^{-0{,}50015t}$

Disponibilitatea dispozitivului de împrăştiere este:

$$A(t) = P_1(t) + P_2(t) = 0{,}998965 - 0{,}007357e^{-0{,}50015t} \qquad (11.7)$$

Media disponibilităţii în funcţionare a macaralei este:

$$A(10) = \frac{1}{10}\int_0^{10} A(t)dt = \frac{1}{10}\left[0{,}998965\ t + 0{,}014709\ e^{-0{,}50015\,t}\right]_0^{10}$$

$A(10) = 0{,}997509$

Astfel, pierderile cauzate de ne-funcţionarea macaralei pe timpul celor 10 ore este:

Costul ne-funcţionării $=[1\text{-}A(10)]10.200 = 25{,}45$ RON/oră

Costul de achiziţie al dispozitivului, pe oră, este:

$$\text{Costul de achiziţie pe oră} = \frac{100.000}{365 \times 10 \times 5} = 5{,}47\ RON$$

Aşadar, costul total în cazul alternativei 1 este:

Cotul total = 25,45 + 5,47 x 10 = 80,15 RON/oră (11.8)

Alternativa 2 măreşte rata de reparaţie la o reparaţie pe oră. Înlocuind în ecuaţia (3.41), se obţine:

Scanned with OKEN Scanner

$$A(t) = \frac{1}{8{,}831 \times 10^{-3} + 1} + \frac{8{,}831 \times 10^{-3}}{8{,}831 \times 10^{-3} + 1} e^{-(8{,}831 \times 10^{-3} + 1{,}0)t}$$

$$A(t) = 0{,}9912463 + 0{,}0087536\ e^{-1{,}008831t}$$

Media disponibilității în funcționare a macaralei, pentru varianta 2, este:

$$A(10) = \frac{1}{10} \int_0^{10} \left[0{,}9912463 + 0{,}0087536\ e^{-1{,}008831\,t}\right] dt$$

$A(10) = 0{,}9921140.$

Astfel, pierderile cauzate de ne-funcționarea macaralei pe timpul celor 10 ore, pentru varianta 2, este:

Costul ne-funcționării = [1 – $A(10)$] x 10.400 = 82 RON/oră (11.9)

Comparând ecuațiile (11.4), (11.8) şi (11.9) rezultă că alternativa 1 este de preferat întrucât rezultă cele mai mici pierderi pe ora de ne-funcționare.

CAZUL 2. PROIECAREA UNEI LINII DE FABRICAȚIE

INTRODUCERE

O linie de fabricație produse alimentare care este folosită pentru introducerea alimentelor în pachete, respectiv pentru sigilarea şi etichetarea acestora, este prezentată în figura 11.4. Procesul despre care este vorba în acest studiu de caz este tocarea şi ambalarea cărnii de vită.

Carnea crudă este adusă manual în secția în care se află linia de fabricație, fiind întocmită o fişa cu numărul lotului, cu timpul şi data când carnea este introdusă pe linia/canalele de alimentare (stânga sus - figurii 11.4). Componentele tocăturii sunt carnea de vită şi ingrediente vegetale.

Scanned with OKEN Scanner

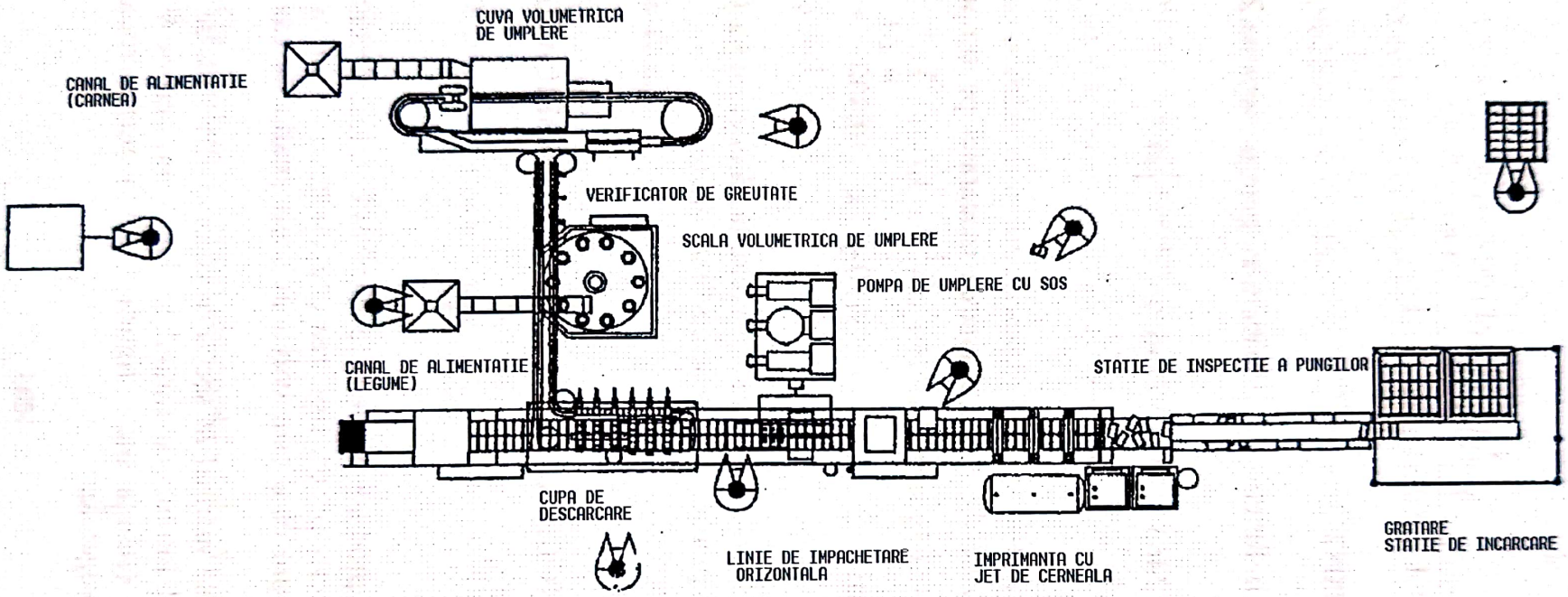


Figura 11.4 Linie de fabricatie produse alimentare

Scanned with OKEN Scanner

Linia de alimentare cu carne, care este o magazie/buncăr cu transportor, alimentează tocătorul umplând mai apoi cupele volumetrice. Sistemul de transport are în componență și un opritor de linie care cântărește conținutul cupei și re-dirijează cupele înapoi la tocător, dacă acestea sunt în afara specificațiilor de greutate.

Cupele acceptate ca greutate sunt dirijate spre buncărul pentru ingrediente vegetale, primind cantitatea necesară conform rețetei. Când ajung în stația de umplere a mașinii de împachetat, cantitățile proporționate sunt mutate în cupe de descărcare care răstoarnă conținutul în pachete. Dacă rețeta prevede, este adăugat, separat în fiecare pachet, un anumit tip de sos de către dozatorul de sos. Prin această succesiune de evenimente, este realizată umplerea automată a pungilor cu o anumită cantitate de amestec carne tocată – ingrediente vegetale – sosuri.

Mașina de împachetat din stația de formare are direcția de lucru orizontală (stânga-jos în fig. 11.4) fiind o mașina de formare-umplere-sigilare(F/U/S). Următorii pași sunt realizați pe aceea mașina: după ce compoziția este pusă în pachete și sosul este automat distribuit, pachetul este dirijat mai departe într-o stație de sigilare, unde punga de polimer este încălzită și presată, sigilându-se astfel pachetul. La următorul post de lucru, o imprimantă Video-jet imprimă pachetul cu numele produsului și datele referitoare valabilitate, urmând mai apoi separarea pachetelor prin tăierea foliei dintre ele. În final, pungile sunt inspectate și încărcate în cărucioare pentru a fi duse în stația de refrigerare/congelare.

Coordonarea sistemului F/U/S se face prin dispozitive de control locale amplasate după fiecare din fazele caracteristice ciclului de lucru. Acesta este setat pentru unplerea/sigilarea/imprimarea a unui pachet continuu de 6 pungi. Dacă totul decurge normal, automat se reia acest ciclu.

Deoarece toate operațiile F/U/S au propriile dispozitive de control, toate operațiile *start* și *stop* sunt accesibile la tabloul de comanda, putând fi comandate manual și individual. Întreruperile care se pot întâmpla în orice sub-sistem cauzează oprirea liniei.

Verificatorul de greutate prevede o afișare digitala a greutății celor mai recente pachete ce au fost verificate. Oricum această dată nu este percepută și înscrisă permanent în sistemul de date al liniei. Singurele înscrieri automată păstrate sunt cele referitoare la presiunea de sigilare a pachetelor și la temperaturile de refrigerare/congelare.

EXPUNEREA PROBLEMEI

Alternativa la acest sistem de funcționare este adăugarea unui dispozitiv de control al întregii linii de producție și a unui tablou de comanda centralizat, încorporând toate operațiile de control unitare existente de-a lungul liniei și care să aibă capacitatea de a asigura înregistrarea tuturor datelor.

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

În acest nou sistem, controlerele tuturor operaţiilor unitare se raportează la controlerul liniei de producţie. Este astfel posibil să acţionezi asupra controlului liniei centrale de la controlerul liniei de producţie, la fel de bine ca şi în cazul local, folosind controlerele pentru fiecare sub-sistem. Informaţia sub-sistemului va fi raportată la controlerul central, de fiecare controler al sub-sistemului. Afişarea şi citirea informaţiei pe tabloul central de comandă permite emiterea unor concluzii privind statutul de funcţionare al tuturor operaţiilor sistemului/sub-sistemelor, inclusiv cauzele unor eventuale defectări. Cauzele defectărilor şi timpii de întrerupere a bunei funcţionări vor fi păstrate ca înregistrare permanentă, datele fiind permanent actualizate pentru identificarea corecţiilor ce trebuiesc făcute, atât în condiţiile de funcţionare cât şi în sistem.

Ratele de defectare ale maşinilor şi controlerelor individuale sunt date în tabelul 11.2. Rata de reparare este de 0,08 reparaţii/oră. Să se analizeze efectul alternativei propuse asupra disponibilităţii generale a liniei de producţie. Se recomandă schimbări în proiectul liniei de producţie care să asigure un minim de productivitate de 47.000 pungi/zi.

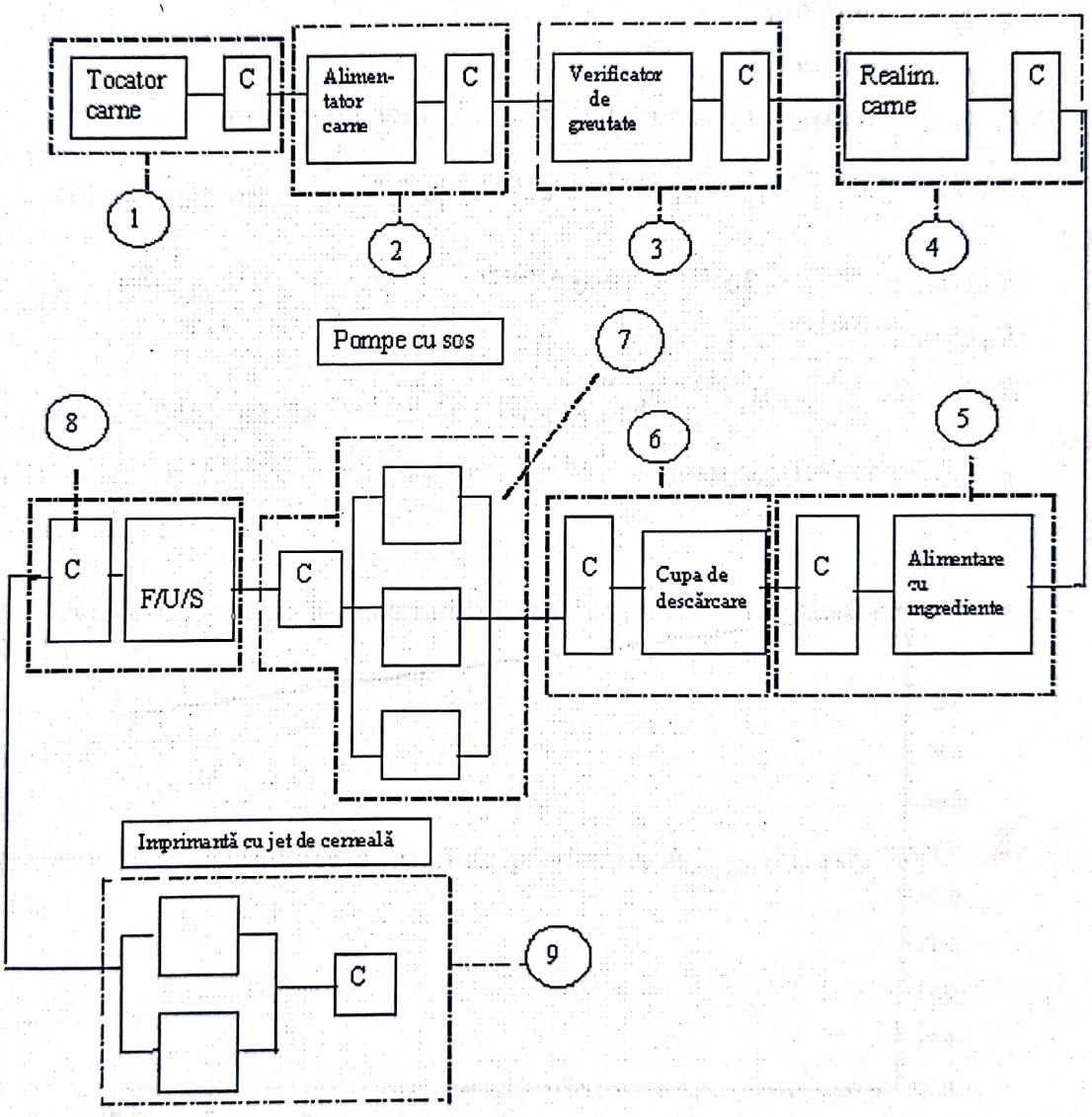
Tabelul 11.2.Rata de defectare pentru o linie de producţie

Echipament	Nr. unităţi	Rata defectare(constantă)
Tocător carne	1	$7,5x10^{-4}$ avarii/oră
Alimentator carne	1	$8,9x10^{-4}$ avarii/oră
Verificator de greutate	1	$9,5x10^{-4}$ avarii/oră
Realimentator cantitativ	1	$5x10^{-4}$ avarii/oră
Alimentator ingrediente	1	$4x10^{-4}$ avarii/oră
Cupa de descărcare	1	$12x10^{-5}$ avarii/oră
Pompa de umplere cu sos	3	15×10^{-5} avarii/oră
F/U/S	1	$20x10^{-5}$ avarii/oră
Imprimanta cu jet	2	$8x10^{-6}$ avarii/oră
Controler pentru fiecare unitate	9	$5x10^{-6}$ avarii/oră
Controler Central	1	$6x10^{-6}$ avarii/oră
Tablou de comanda central	1	$6x10^{-7}$ avarii/oră

SOLUŢIE

Linia centrală de producţie

Echipamentul liniei centrale de producţie, împreună cu controlerele respective, este considerat un sistem în serie deoarece avaria oricărei unităţi cauzează stoparea întregii linii. Diagrama bloc de fiabilitate a liniei este prezentată în figura 11.5.



Nota: C indică controler local

Figura 11.5. Diagrama bloc de fiabilitate a unei linii curente de producţie

Scanned with OKEN Scanner

Se estimează fiabilitatea fiecărui bloc funcțional (da la 1 la 9) după cum urmează:

$$R_1(t) = e^{-0.000755t}$$

$$R_2(t) = e^{-0.000895t}$$

$$R_3(t) = e^{-0.0001t}$$

$$R_4(t) = e^{-0.000505t}$$

$$R_5(t) = e^{-0.000405t}$$

$$R_6(t) = e^{-0.000125t}$$

$$R_7(t) = [3e^{-1.5 \times 10^{-4}t} - 3e^{-3\times10^{-4}t} + e^{-4.5\times10^{-4}t}]e^{-5\times10^{-6}t}$$

sau

$$R_7(t)=3e^{-1.55\times10^{-4}t} - 3e^{-3.05\times10^{-4}t} + e^{-4.55\times10^{-4}t}$$

$$R_8(t)=e^{-0.000205t}$$

$$R_9(t)=(2e^{-8\times10^{-6}t} - e^{-16\times10^{-6}t})e^{-5\times10^{-6}t}$$

sau

$$R_9(t)=2e^{-13\times10^{-6}t} - e^{-21\times10^{-6}t}$$

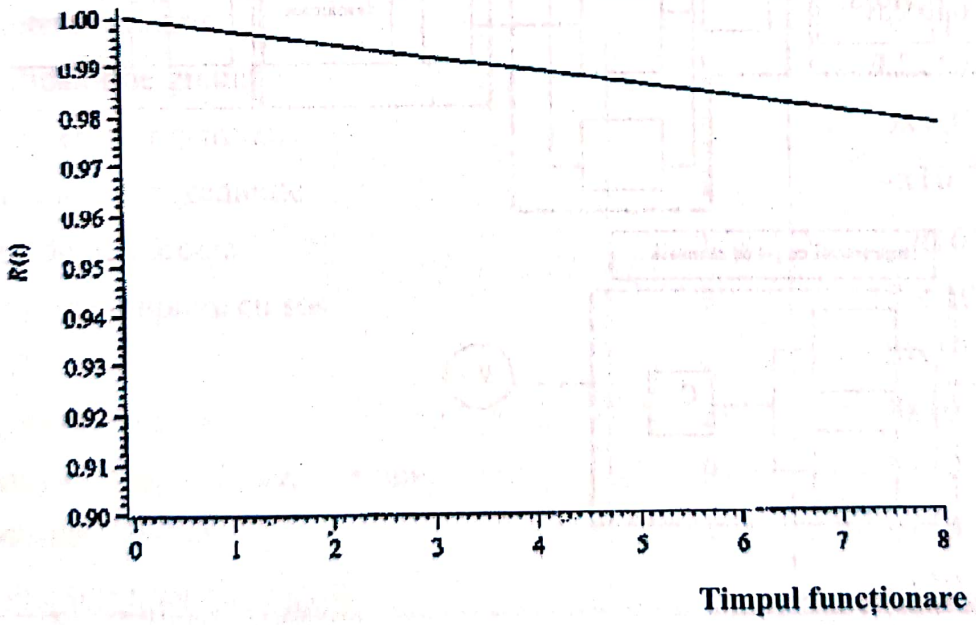


Figura 11.6 Variația lui R(t) pentru linia de producție

Scanned with OKEN Scanner

Fiabilitatea liniei curente este:

$$R_{curent}(t) = e^{-0.00299t}(3e^{-1.55\times10^{-4}t} - 3e^{-1.55\times10^{-4}t} - 3e^{-3.05\times10^{-4}t} + e^{-4.55\times10^{-4}t})(2e^{-4.55\times10^{-4}t})$$
$$(2e^{-13\times10^{-6}t} - e^{-21\times10^{-6}t})$$
$$R_{curent}(t) = 6e^{-3.158\times10^{-3}t} - 6e^{-3.308\times10^{-3}t} + 2e^{-3.458\times10^{-3}t} - 3e^{-3.166\times10^{-3}t} + 3e^{-3.166\times10^{-3}t} -$$
$$- \quad e^{-3.466\times10^{-3}t}$$

În Fig. 11.6 este prezentată variaţia fiabilităţii unei linii de producţie pentru un schimb de opt ore.

F.d.p.-ul liniei curente este:

$$f_{curent}(t) = \frac{dR_{curent}(t)}{dt}$$

$$f_{curent}(t) = 18{,}948\times10^{-3}e^{-3.158\times10^{-3}t} - 19{,}848\times10^{-3}e^{-3.308\times10^{-3}t} +$$
$$+ 6{,}916\times10^{-3}e^{-3.458\times10^{-3}t} - 9{,}498\times e^{-3.166\times10^{-3}t} + 9{,}948\times10^{-3}e^{-3.316\times10^{-3}t} -$$
$$- 3{,}466\times10^{-3}e^{-3.466\times10^{-3}t} \qquad (11.11)$$

Rata efectiva de avarie a sistemului este obţinută împărţind ecuaţia (11.11) la ecuaţia (11.10):

$$h_{curent}(t) = \frac{f_{curent}(t)}{R_{curent}(t)} \qquad (11.12)$$

Disponibilitatea instantanee a liniei de producţie, $A_{curent}(t)$, este estimată folosind ecuaţia (4.47):

$$A_{curent} = 1 - \frac{h_{curent}(t)}{h_{curent}(t) + \mu} \qquad (11.13)$$

Valoarea medie disponibilităţii unei linii de curent de producţie pe un schimb este:

$$A_{curent}(8) = \frac{1}{8}\int_0^8 A(t)dt \qquad (11.14)$$

Scanned with OKEN Scanner

De menționat că rata de defectare a liniei este constantă şi că valoarea ei este $3{,}00780\times 10^{-3}$ avarii/oră. Astfel,

$$A_{curent}(8) = 0{,}96385545$$

Numărul de pungi produse în timpul unui schimb de opt ore este:

$$0{,}9638545\times 480\times 100 = 46.265 \text{ pungi.}$$

Aceasta cantitate este mai mică decât minimul de pungi cerut de 47.000 pungi. Dublând rata de reparare la 0,16 reparații/oră, rezultă:

$$A(8) = 0{,}98159510$$

Productivitatea corespunzătoare va fi de 47.116 pungi.

Alternativa propusă

Controlerul central şi tabloul său pot fi considerate ca unități suplimentare pentru controlul fiecărei piese din echipament. De exemplu, dacă controlerul local al verificatorului de greutate se defectează, controlerul central va executa funcțiile controlerului local şi nu va fi nici o întrerupere în linia de producție. Similar, dacă controlerul central are o avarie, controlerul local operând independent, nu va întrerupe linia de producție. Fiabilitatea sistemului propus poate fi estimata considerând că controlerul local ($\lambda = 5\text{x}10^{-6}$) este de fapt conectat în paralel cu controlerul central ($\lambda = 6\text{x}10^{-6}$) şi tabloul său de comandă ($\lambda = 6\text{x}10^{-7}$). Astfel, fiabilitatea sistemului de control este:

$$R_c(t) = (1 - e^{-6{,}6x10^{-6}t})(1 - e^{-5x10^{-6}t})$$

sau

$$R_c(t) = e^{-6{,}6x10^{-6}t} + e^{-5x10^{-6}t} - e^{-11{,}6x10^{-6}t}$$

Controlerul efectiv este conectat în serie cu fiecare piesă din echipament. Astfel, fiabilitatea fiecărui bloc devine:

$$R_1(t) = e^{-7{,}566x10^{-4}t} + e^{-7{,}55x10^{-4}t} - e^{7{,}616x10^{-6}t}$$

$$R_2(t) = e^{-8.966x10^{-4}t} + e^{-8.95x10^{-4}t} - e^{-9.016x10^{-4}t}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$R_3(t) = e^{-1,016x10^{-4}t} + e^{-1x10^{-4}t} - e^{-1,066x10^{-4}t}$$

$$R_4(t) = e^{-5,066x10^{-4}t} + e^{-5,05x10^{-4}t} - e^{-5,116x10^{-4}t}$$

$$R_5(t) = e^{-4,066x10^{-4}t} + e^{-4.05x10^{-4}t} - e^{-4,116x10^{-4}t}$$

$$R_6(t) = e^{-1,266x10^{-4}t} + e^{-1,25x10^{-4}t} - e^{-1,316x10^{-4}t}$$

$$R_7(t) = (3e^{-1,5x10^{-4}t} - 3e^{-3,0x10^{-4}t} + e^{-4.5x10^{-4}t}) R_c(t)$$

$$R_8(t) = e^{-2,066x10^{-4}t} + e^{-2.05x10^{-4}t} - e^{-2,116x10^{-4}t}$$

$$R_9(t) = (2e^{-8x10^{-6}t} - e^{-16x10^{-6}t}) R_c(t).$$

Astfel:

$$R_{propus}(t) = \prod_{i=1}^{9} R_i(t).$$

Întrucât estimarea directa a lui $F(t) = - dR(t)/dt$ este dificil de obținut, se calculează numeric $R_{propus}(t)$, pentru un schimb de 8 ore. Rezultatele obținute sunt prezentate în tabelul 11.3.

Tabelul 11.3. Rezultate parțiale ale valorilor fiabilității

Timpul	Fiabilitatea
0,017	0,99995035
0,033	0,99990165
0,050	0,99985248
0,067	0,99980289
0,083	0,99975342
0,100	0,99970460
-	-
7,917	0,97688252
7,933	0,97683388
7,950	0,97678584
7,967	0,97673810
7,983	0,97668970
8,000	0,97664177

Scanned with OKEN Scanner

Examinarea rezultatelor arată că rata de defectare a sistemului este de $29{,}54 \times 10^{-4}$.
Disponibilitatea sistemului este:

$A(8) = 0{,}964384861.$

Numărul de pungi împachetate în timpul unui schimb de 8 ore este de:

0,964384861 x 480 x 100 = 46.290 pungi.

Rezultă în mod clar că alternativa propusă are mici efecte asupra disponibilității sistemului. Pe lângă aceasta, producția zilnică nu izbuteşte, precum în sistemul curent, să atingă cantitatea minimă cerută de 47.000 pungi.

Dacă rata de reparare este dublată, disponibilitatea sistemului propus devine:

$A(8) = 0{,}981869571$

Numărul corespunzător de pungi ambalate pe zi va fi de 47.129.

Disponibilitatea sistemului mai poate fi îmbunătățită înlocuind realimentatorul cantitativ şi alimentatorul de ingrediente cu alte echipamente care sunt caracterizate prin rate de defectare mai reduse.

CAZUL 3. SISTEM DE DETECȚIE A MATERIALELOR EXPLOZIVE

Detectare explozibilului reprezintă o preocupare majoră pentru forțele de ordine, mai ales în urma ultimelor evenimente teroriste internaționale. Materialul exploziv şi dispozitivele mici, dar puternice, pot fi ascunse cu uşurință în genți şi bagaje. Metodele pentru detectarea explozibilului s-au perfecționat de-a lungul anilor. Numai că, toate acestea au avut loc în paralel cu dezvoltarea similară a sistemelor de ascundere şi mixare a materialului exploziv. Rezultatul este că metodele curente nu reuşesc să descopere întru-totul o varietate atât de mare de explozive.

În încercarea de a detecta materialul exploziv din bagajele pasagerilor la aeroport, un fabricant de sisteme de cercetare a propus să se proiecteze un sistem cu raze *X* capabil să clasifice materialul din bagaje în explozibil sau non-explozibil.

Sistemul este bazat pe expunerea bagajelor unei inspecții cu raze *X*, raze care scanează obiectele din bagaje şi transmit semnale spre cel mai apropiat detector de elemente. Spectrul razelor *X* colectate de detectorul de elemente, la fiecare 30 ms, este apoi transferat, fără a se interfera cu alte spectre de achiziție, la procesoarele digitale de

Scanned with OKEN Scanner

semnal (PDS), care realizează discriminarea dintre spectrul favorabil şi cel suspect, în timp real. Un rezumat al datelor tehnice caracteristice sistemului cu raze *X* este dat în tabelul 11.4. Sistemul este compus din 6 componente majore, după cum sunt prezentate în figura 11.7.

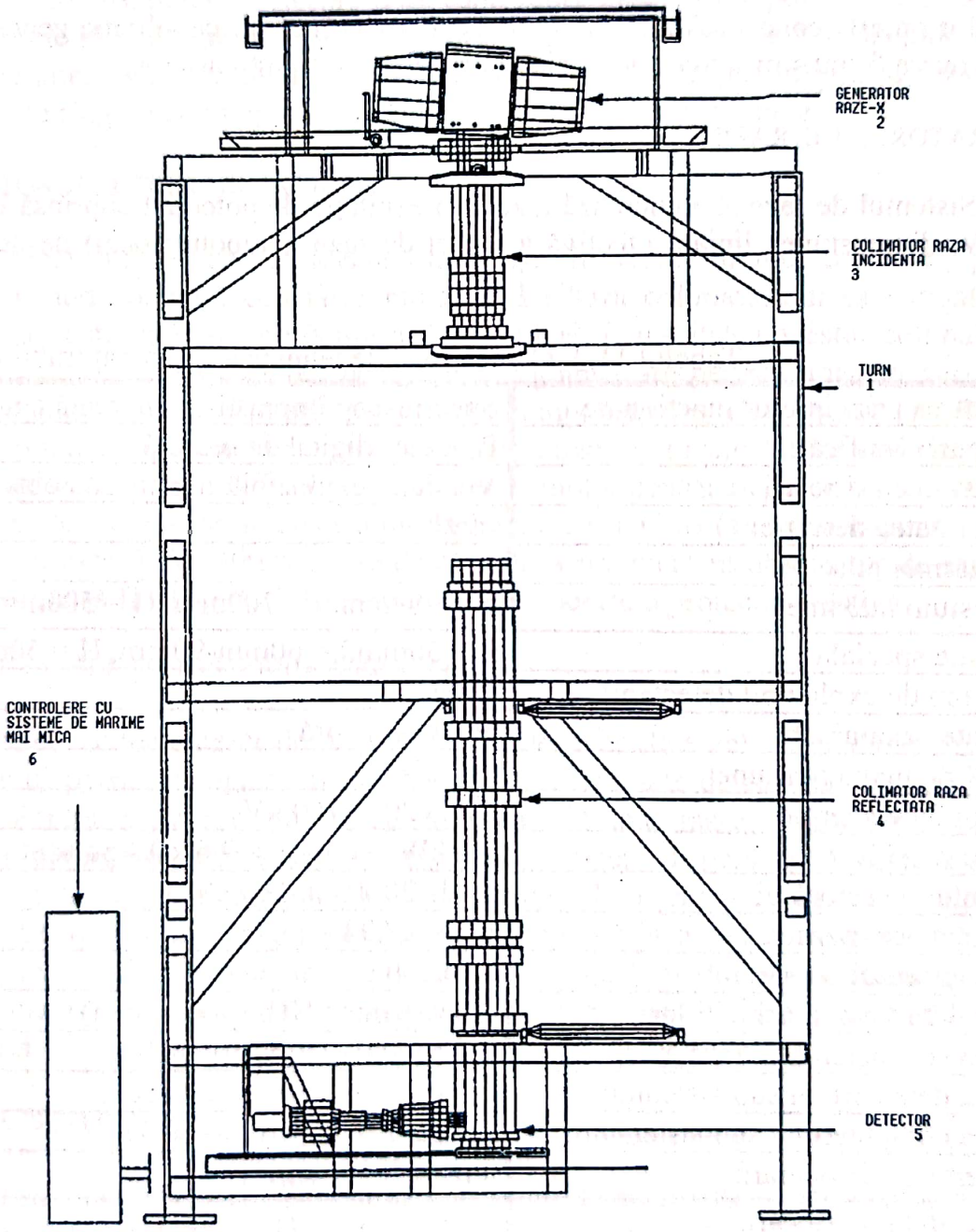


Figura 11.7 Schema sistemului de detecţie a materialelor explozibile

Scanned with OKEN Scanner

TURNUL

Este construit din tubulatură de oţel sudată pentru a asigura minimum de flexibilitate şi de mişcare în timpul folosirii. După cum se observă din figură, există o îmbinări transversale încrucişate adăugate pentru a întări structura. Sistemul de manipulare a bagajelor nu este conectat în nici un fel la turn, astfel încât orice vibraţie generată în sub-sistem nu va fi transmisă turnului şi nici unuia dintre alte sub-sisteme.

GENERATORUL DE RAZE X

Sistemul de raze *X* generează raze la o excitaţie de potenţial cuprinsă între 150 şi 200 kV, dimensiunea liniara efectivă a sursei de raze *X* (spotul focal) ne-depăşind 0,8 mm.

Tabelul 11.4. Caracteristicile tehnice ale generatorului de raze *X*

Verificarea principiului funcţionare	Spectroscop împrăştiere coerentă a razelor *X*
Principiul clasificării	Procesor digital de semnal
Rezultatul clasificării	Versiuni: explozibil, mascat sau obscur
Probabilitatea detecţiei	>99%
Rata alarmei false	<1%
Dimensiuni maxime	L = 900mm; l = 700mm; H = 500mm
Rezoluţia speciala	L = 50mm,l = 60mm-90mm, H = 50mm
Minimum de explozibil detectabil	100g
Cantitatea examinată	600 bagaje/oră
Raze X de înaltă tensiune	160 kV
Domeniul de energie	De la 20 la 160 kV
Puterea razei X	4,2 kW –continuu; 9,6 kW- pulsant
Domeniul detectorului	De la 20 kV la 120 kV
Rezoluţia detectorului	<1,6 la 60 kV
Rata contorului numărare	<40.000/s
Spectrul de timp al achiziţiilor	30ms(pentru 10 bagaje/ minut)
Puterea sub-sistemului raze X	3 faze 480V/30A, 50/60Hz
Puterea detectorului sub-sistemului	O faza220V/20A, 50/60Hz
Puterea computerului sub-sistemului	O faza 220V/10A, 50/60Hz
Temperatura de operare	$+10^{o}$ C…….$+40^{o}$ C
Temperatura de stocare	-20^{o} C…$+70^{o}$ C

Scanned with OKEN Scanner

Tubul de raze *X* este unul închis, înalt vidat cu anod rotitor, capabil de a genera continuu raze *X* la 160 kV. Anodul este alcătuit dintr-un strat de wolfram montat în apropiere de un disc profilat de molibden, cu raza de 200 mm şi se roteşte la 10.000 r.p.m. cu frecare foarte redusă, sprijinit pe metal lichid, conducător termic. Desigur că, răcirea trebuie asigurată de fiecare dată când tubul este în funcţionare. În plus, răcirea activă trebuie să continue încă 30 min., după ce generarea razelor *X* se închide. Datorită acestei cerinţe, este nevoie de o rezervă permanentă de putere pentru funcţionarea pompelor ce asigură circulaţia, în eventualitatea unei căderi de putere.

COLIMATOARELE DE RAZE INCIDENTE

Colimatorul de raze incidente este ataşat în vârful tubului protector, pentru a asigura în mod continuu ecranarea radiaţiei. La baza colimatorului este montat un st complex de fante mobile care definesc forma razei. Etanşeitatea acestor colimatoare (v. Fig.11.8) este dată de un model de telescop reglabil care permite mişcări verticale ale componentelor în timpul alinierii. Majoritatea componentelor telescopului sunt făcute din oţel. Dar orice component care intră în contact direct cu razele *X* este executat dintr-un aliaj dur de wolfram cu 10 % cupru. Principalul motiv pentru alegerea acestui metal este că orice fel de radiaţie caracteristica produsă va inter-acţiona (se va suprapune) cu liniile din tubul cu raze *X*. Wolframul este de asemenea un excelent absorbitor de raze *X*, iar fantele trebuie să fie doar de 5-10 mm deschidere pentru o protecţie efectivă.

COLIMATOARELE DE DISPERSIE A RAZELOR

Scopul colimatoarelor de dispersie a razelor este de a colecta şi direcţiona razele *X*, de a le dispersa pe bagaj, rezultatele fiind interpretate de cel mai apropiat element detector. Pentru a avea o putere de rezoluţie cât mai mare, colimatorul trebuie să controleze divergenţa orizontală şi tangenţială a razei dispersate. Aceasta are loc cu ajutorul a patru colimatoare radiale şi respectiv 11 colimatoare în stea. Cele radiale limitează divergenţa unghiulară măsurată în planul conţinând axele sistemului şi punctul de difracţie. Colimatoarele în stea, pe de cealaltă parte, controlează divergenţa perpendiculară la acest plan. Dacă raza are abateri în ambele plane, puterea de rezoluţie va fi redusă.

SISTEMUL DETECTOR

Cel mai important component al sistemului detector este o refrigerator criogenic, cu un singur cristal de Ge, detector de raze *X*. Când o rază *X* este absorbită în cristal, ea creează o abundenţă de perechi de găuri de electroni, număr care este proporţional cu

Scanned with OKEN Scanner

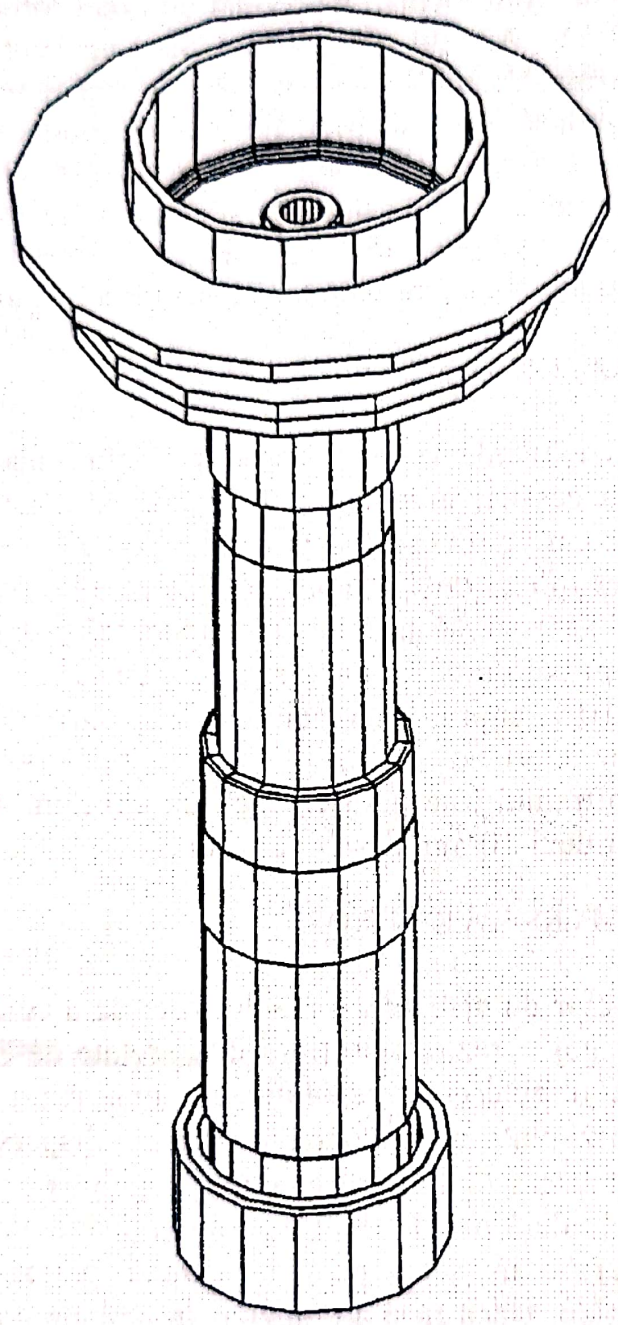


Figura 11.8 Colimatorul de raze incidente

energia razelor *X* (E). O energie mare (1000V) demarează în cristal o tensiune de exploarare foto-indusă în sarcina de încărcare a electrozilor în altă parte a cristalului, creând un impuls electric. Aria integrală a acestui impuls este proporţională cu

Scanned with OKEN Scanner

încărcătura foto-indusă şi prin urmare cu energia razei *X* absorbite. Componente electronice externe mai întâi amplifică şi modelează forma acestui impuls. Un analizator cu canale multiple sortează apoi impulsul în conformitate cu sarcina de încărcare netă (energia razei *X*) şi creşterile numărului de fotoni.

SISTEMUL DE CONTROL ELECTRONIC

Întregul sistem este controlat de un computer care achiziţionează spectrele de raze *X* de la fiecare din cele 13 segment detectoare, la fiecare 30 ms. Acest proces constă în citirea datelor referitoare la energie sosite de la detector şi formarea spectrului energetic în computer (RAM), clasificând aceste date.

Acest spectru trebuie transferate, fără a interfera cu spectrul achiziţionat, la 13 procesoare digitale de semnal (PDS) care realizează împărţirea spectrelor în timp real în *suspecte* şi *normale/favorabile.*

EXPUNEREA PROBLEMEI

Sistemul de detecţie al materialelor explozibile are mai mult de 400 componente. Funcţionarea generatorului de raze *X* la voltaje ridicate are un efect direct asupra timpilor de defectare ai componentelor sistemului. Pentru a susţine valabilitatea proiectării, funcţionării şi măsurătorilor sistemului, se propune un test accelerat de durabilitate aplicat pe cel mai critic sub-sistem: generatorul de raze *X*. Acest sub-sistem se identifică ca fiind detectorul în ansamblul său. 30 de elemente ale detectorului sunt expuse la o funcţionare de 200 kV, timpii lor de defectare fiind înregistraţi în tabelul 11.5. Sistemul operează normal 160 kV (factorul accelerație este deci egal cu 10).

Timpii de defectare a sub-sistemelor rămase în funcţionare au rămas sub observaţie timp de 2 ani de operare. Ratele de defectare ale acestor sub-sisteme sunt prezentate în tabelul 11.6. Sistemul de detectare al materialelor explozibile este destinat inspectării bagajelor, cu o rată de verificare un bagaj la 6 secunde, sau 600 bagaje pe oră. Când sistemul cade, este nevoie de 30 de minute pentru răcire, înainte de a începe reparaţiile.

Tabelul 11.5. Timpii de defectare la 200 kV

12,86	32,62	34,29	34,44	75,17	80,88	92,53	96,44	118,27	142,99
150,87	15,68	158,37	177,80	178,89	198,48	237,67	241,26	317,85	364,38
390,61	470,03	470,58	472,80	476,14	768,47*	768,47*	768,47*	768,47*	768,4*

Obs. * indică cenzurarea (întreruperea testării)

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 11.6. Rate de defectare ale sistemelor

Sub-sistem	Rata constanta de defectare
Generator de raze X	$8,5 \times 10^{-5}$ defectări/oră
Colimator raze incidente	$7,2 \times 10^{-6}$ defectări/oră
Colimator dispersie raze	$10,2 \times 10^{-6}$ defectări/oră
Controler	$7,35 \times 10^{-5}$ defectări/oră

Timpul mediu de reparare a sistemului actual este de 11 ore, perioadă urmată de un timp de încălzire de 30 de minute. Un aeroport principal primeşte un flux de 40 000 bagaje pe zi pentru inspecţie (perioada ocupată a unui aeroport este de 12 ore/zi).

Conducerea aeroportului este interesata în determinarea numărului şi a configuraţiei sistemelor de detecţie a materialelor explozibile, care sunt capabile să inspecteze 40.000 bagaje zilnic.

SOLUŢIA

Se vor utiliza timpii de defectare ai detectorilor pentru a estima valoarea ratei de defectare în condiţiile unei funcţionări normale. Folosind ecuaţia (6.8), se obţine:

$$\lambda_s = \frac{r}{\sum_{i=1}^{r} t_i + \sum_{i=1}^{n-r} t_i^+}$$

unde:
λ_s = rata de defectare la nivelul s de solicitare,
r = numărul nivelurilor ne-cenzurate de solicitare,
t_i = timpul de defectare de rang i ,
t_i^+ = timpii de defectare cenzuraţi.

$$\lambda_s = \frac{25}{5.178,9 + 3.842,35} = 27,71 \times 10^{-4} \text{ defectări/oră.}$$

Rata de defectare a unui element detector, în condiţii de operare normală, este:

$$\lambda_{element} = \frac{\lambda_s}{A_F} = 2,771 \times 10^{-4} \text{ defectări/oră.}$$

Scanned with OKEN Scanner

Sistemul detector este alcătuit din 13 elemente detectoare conectate în serie. Astfel, rata de defectare a întregului sistemului detector este:

$\lambda_{sistem} = 36{,}02 \times 10^{-4}$ defectări/oră.

Toate sub-sistemele unității de detecție a explozibilului trebuie să funcționeze corect pentru ca sistemul să aibă o funcționare bună. În acest caz, sub-sistemele sunt considerate a forma o configurație tip serie cu o rată de defectare de 0,00377 defecțiuni/oră.

Dacă presupunem că disponibilitatea sistemului de detecție al explozibilului este 1,0, atunci numărul sistemelor de care este nevoie pentru a face inspecțiile este:

$$\text{Numărul sistemelor} = \frac{40.000}{600\ bagaje\ pe\ ora \times 12} \approx 6$$

Oricum, valorile ratelor de defectare şi reparare ale sistemului determină o disponibilitate mai mică de 1,0. Pentru a estima disponibilitatea celor 6 sisteme în timpul de funcționare al aeroportului de 12 ore, se vor exprima stările de tranziție a probabilității în modul următor.

Fie P_i (t) probabilitatea ca să existe i sisteme operaționale la timpul t (i = 0,1,2,...,6). Ecuațiile (4.99) .. (4.103) vor deveni :

$$\dot{P}_0(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \tag{11.16}$$

$$\dot{P}_i(t) = -(\lambda + \mu)P_i(t) + \lambda P_{i-1}(t) + \mu P_{i+1}(t) \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5) \tag{11.17}$$

$$\dot{P}_6(t) = -\mu P_6(t) + \lambda P_5(t) \tag{11.18}$$

unde μ este rata de reparare a sistemului. Înlocuind λ=37,7 $\lambda\, 10^{-4}$ defectări/oră şi μ=0,333 reparații/oră în ecuațiile (11.16).... (11.18) şi rezolvând numeric cu condiția $\sum_{i=0}^{6} P_i(t) = 1$, se obțin valorile lui $P_i(t)$. O prezentare parțială a rezultatelor este dată în tabelul 11.7.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 11.7 Lista parţială a valorilor lui $P(t)$

Timpul (sec.)	$P_0(t)$	$P_1(t)$	$P_2(t)$	$P_3(t)$	$P_4(t)$	$P_5(t)$	$P_6(t)$
1	0,99981	0,00019	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
2	0,99962	0,00038	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
3	0,99944	0,00056	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
4	0,99925	0,00075	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...
43.197	0,95476	0,04319	0,00195	0,00009	0,00000	0,00000	0,00000
43.198	0,95476	0,04319	0,00195	0,00009	0,00000	0,00000	0,00000
43.199	0,95476	0,04319	0,00195	0,00009	0,00000	0,00000	0,00000
43.200	0,95476	0,04319	0,00195	0,00009	0,00000	0,00000	0,00000

Dacă se defineşte disponibilitatea ca fiind $P_0(t)$ astfel încât să nu apară nici un defect al sistemului de detecţie al explozibililor în timp de 12 ore, atunci :

$$A(T=12\ ore)=\frac{1}{43.200}\sum_{t=1}^{43.200}P_0(t)=\frac{41.238,67188}{43.200}=0,954598,$$

şi numărul bagajelor inspectate în 12 ore este de 41.238. Deci, este atins numărul minim de bagaje cerut a fi inspectate.

CAZUL 4. FIABILITATEA MODELULUI REŢELEI DE TELECOMUNICAŢIE PENTRU SISTEMUL DE CONTROL AL TRAFICULUI AERIAN

INTRODUCERE

Avionul care zboară în afara ariilor supravegheate de radar, cum ar fi suprafaţa de deasupra oceanelor, se bazează pe o frecvenţă radio înalta (HF) de raportare a informaţiilor referitoare la poziţie (latitudine, longitudine, altitudine, etc.) către sistemul de control al traficului aerian. Figura 11.9 prezintă elementele componente ale sub-sistemelor folosite în mod curent în zonele din jurul oceanelor. Legătura radio HF suferă interferenţe de spoturi solare, de acumulări electrostatice, ceea ce cauzează pierderi frecvente de contact între avion şi controlorul de trafic aerian.

Scanned with OKEN Scanner

Din acest motiv se păstrează o separaţie longitudinală relativ mare între avioane, între culoarele de zbor. Ca o contribuţie la efortul de a îmbunătăţi comunicarea, zborul şi sistemului de supraveghere aerian, pentru a acoperi cererea creată de viitoarea creştere a traficului aerian, Organizaţia internaţională a aviaţiei civile (ICAO) defineşte funcţia de supraveghere automată (ADSF) ca: "O funcţie folosită de serviciile de trafic aerian (ATS) în care avionul transmite automat datele, la intervale stabilite de (ATS) de la sol, date provenite de la sistemele de navigare de bord. Ca un minim, dacă datele conţin identificarea avionului şi trei poziţii dimensionale, ele pot fi catalogate că fiind corespunzătoare".

Figura 11.10 prezintă configuraţia unuia dintre numeroasele sub-sisteme posibile utilizat de Administraţia Aviaţiei Federale (FAA) din S.U.A. să conducă ADSF în spaţiul de funcţionare din vecinătatea oceanelor.

Un echipament de avion ADSF, sau o staţie aeronautică de pe pământ (AES), va genera datele de poziţie de la sistemele de navigaţie de la bord, le va transmite automat, fără intervenţia pilotului, sateliţilor de comunicaţie, cum ar fi cei ai Sistemului Internaţional de Sateliţi Maritimi (INMARSAT). Apoi mesajul este transmis unei staţii de la sol (GES) precum cea a Companiei de Sateliţi de Comunicare (COMSAT). Mesajul este recepţionat de o reţea de servicii de comunicaţie, care transferă mesajul la destinaţia nominală, la o rută sau un controlor de terminal, la un centru de control al unei rute de trafic aerian (ARTCC), pentru acţiuni de control.

În corespondenţă cu componentele principale prezentate în figura 11.10, ADSF-ul poate fi considerat ca o sumă de sisteme hard-ware, de comunicaţie şi procedurale.

Sistemele hard-ware dirijează în forme complexe componentele orbitale de control ale unui satelit, la liniile telefonice cele mai simple, folosite pentru a conecta reţelele de telecomunicaţie de la sol cu centrul de control al traficului aerian.

Sistemul de comunicaţie permite schimbul de informaţii între diferite sub-sisteme hardware.

Componentele hard-ware (blocurile HC) comunică între ele prin aceste componente de comunicaţie. Astfel o componentă hardware, este o piesă fizică a echipamentului sau a mediului de transmisie care trebuie să fie operaţională sau accesibilă de ADSF pentru a fi funcţională. O componentă de comunicaţie este orice canal sau cod software care asigură faptul că aceste componente hard-ware rămân accesibile şi conectate între ele.

Sistemul procedural este necesar pentru a coordona folosirea aparaturii şi a sistemelor de comunicaţie, în diferite condiţii de funcţionare.

Scanned with OKEN Scanner

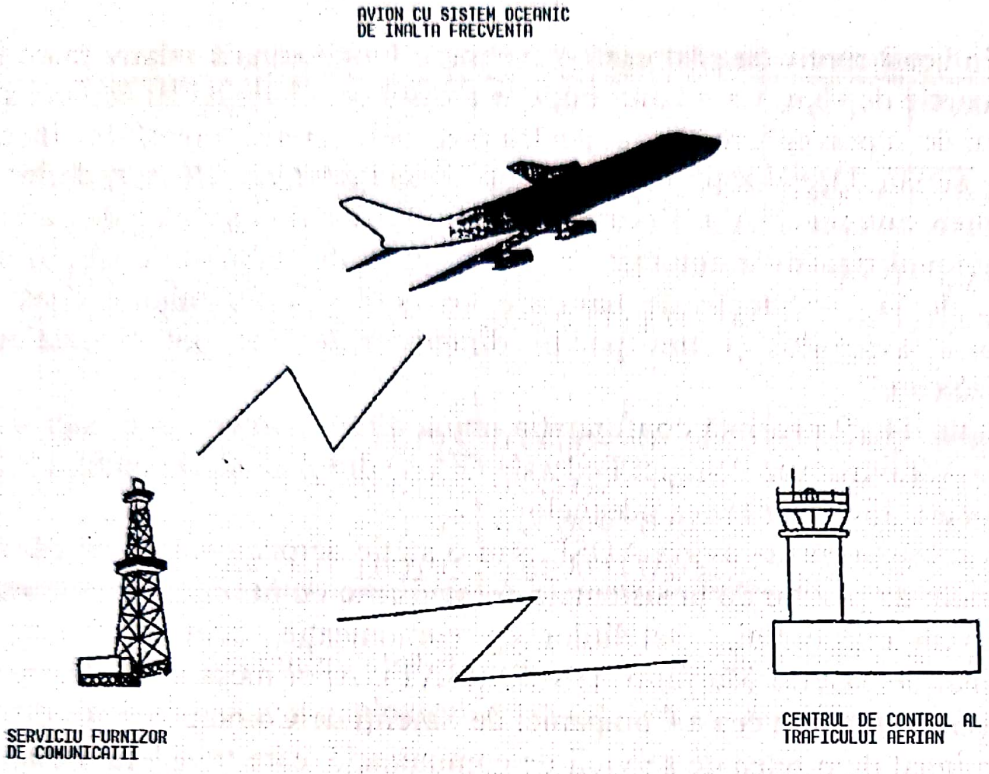


Figura 11.9 Schema curentă a sistemului de control al zborurilor oceanice

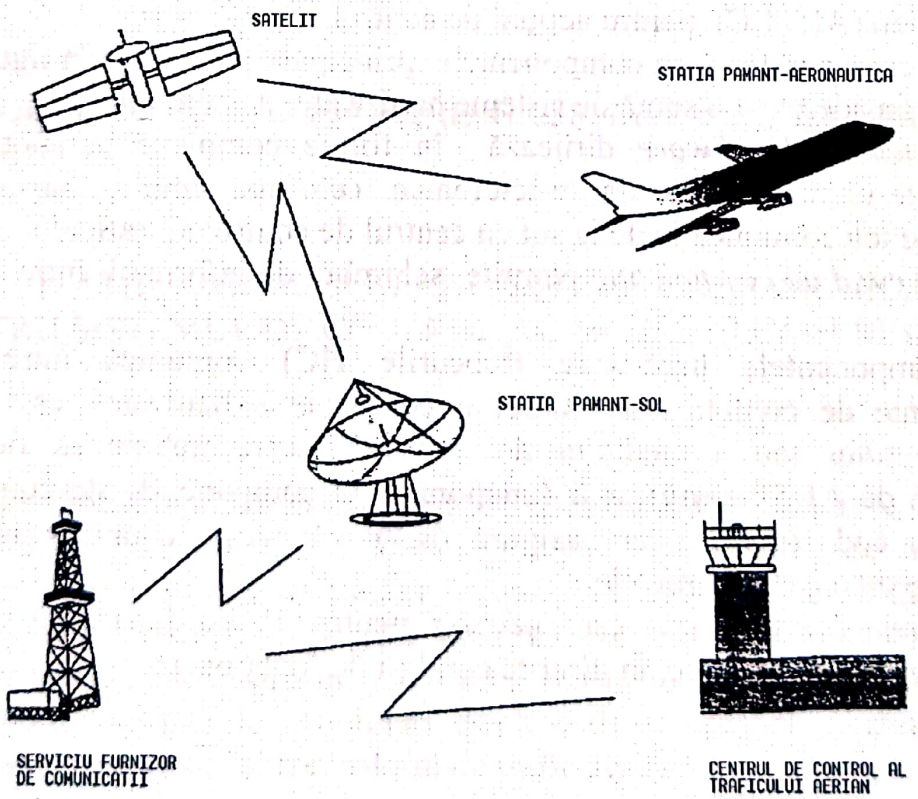


Figura 11.10 Schemă propusă pentru sistemul oceanic de control

Scanned with OKEN Scanner

De exemplu, în situații de urgență sau de avarii catastrofale este necesar să se stabilească o legatură cu un satelit sau un GES care are o amplificare ridicată (o rată de transmitere a semnallui de mai înaltă) sau un nivel de fiabilitate mai ridicat pentru a asigura recepția mesajelor de controlorul ARTCC, în intervalul de timp cerut.

EXPUNEREA PROBLEMEI

Sistemul ADS este, în mod curent, în proces de îmbunătățire. FAA este interesată în analizarea performanțelor diferitelor configurații ale sistemului şi în specificarea valorii fiabilității şi disponibilității de către fabricanții echipamentelor sistemului. Valorile tipice ale disponibilității pentru subsistemele sau echipamentele critice folosite în sistemul de control al traficului aerian sunt de 0,99999 sau mai mari.

Mai important este faptul că acele componente critice ale sistemului ar trebui identificate. Aceasta va face ca FAA să recomande schimbări de proiectare ale acestor componente pentru a se asigura ca fiabilitatea efectivă a întregului sistem este realizată.

Se vor prezenta, în detaliu, componentele hard-ware ale sistemului ADS (a se vedea fig.11.10).

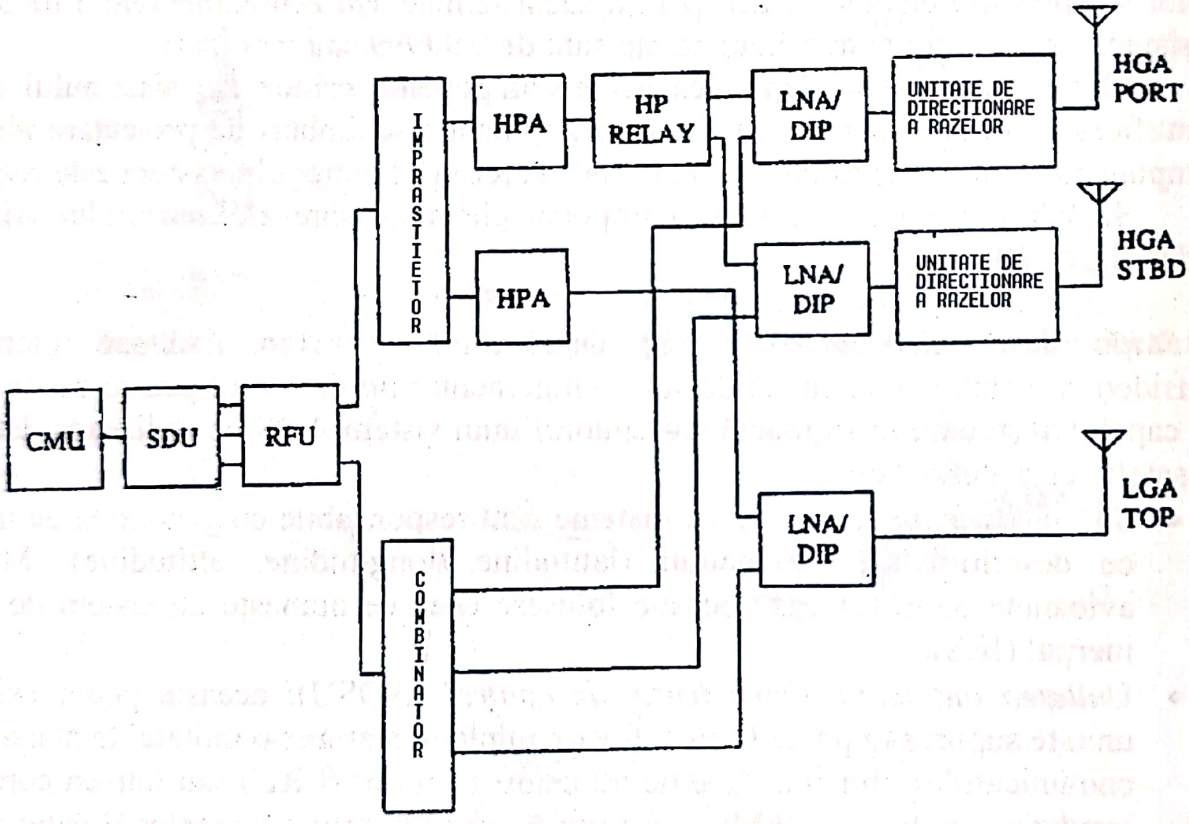
1. *Stația aeronautică de sol* (AES): Orice aripă de avion, fixă sau rotativă, este considerată o stație aeronautică de sol. Echipamentul minim cerut pentru ca un avion să fie capabil să zboare în siguranță, cu ajutorul unui sistem ADS ce utilizează date oferite de satelit, este alcătuit din:

- *Sistemele de navigație*: aceste sisteme sunt responsabile cu generarea de informații ce descriu locația avionului (latitudine, longitudine, altitudine). Multe din avioanele ce traversează oceane folosesc ceea ce numește un sistem de referință inerțial (IRS).
- *Unitatea automată, dependentă, de control* (ADSU): aceasta poate exista ca o unitate suport sau poate fi un software implementat într-o unitate de management a comunicațiilor, într-o unitate de înlocuire a liniilor (LRU) sau într-un computer de conducere a zborului (FMC), precum în cazul tuturor avioanelor Boeing de la 747 la 400. Este unitatea principală responsabilă pentru executarea funcțiilor ADS la bordul AES.
- *Unitatea de control a comunicațiilor* (CMU): acestea acționează ca un "întrerupător", generează şi expediază mesaje pe liniile aer – sol dorite.
- *Unitatea de date ale satelitului* (SDU): această unitate determină modulația şi demodulația, corectarea erorilor, codificarea, cantitatea datelor şi alți parametri de semnal.

Scanned with OKEN Scanner

- *Unitatea de frecvență radio* (RFU): RFU, operând în modul duplex total, constă în amplificatoare de putere mică şi în convertoare electronice de frecvență.
- *Subsistemul antenă*: acesta constă în elemente de descompunere şi combinare de semnal, amplificatori de înaltă putere, amlificatori de zgomot redus, antene pentru semnale înalte şi joase, alte unitati de distribiție a frecvenței radio(RF); combinația acestor elemente depinde de nivelul serviciului cerut de AES.
  O posibilă configurație a unui sistem AES este arată în figura 11.11.

2. *Comunicațiile prin satelit*: serviciul legăturilor de date ADSF va fi suportat de sateliții care aparțin INMARSAT.



HPA=ANTENA DE INALTA PUTERE
HP Relay=RELEU DE INALTA PUTERE
HGA=ANTENA CU CAPTURA MARE
LGA=ANTENA CU CAPTURA MICA
LNA/DIP=AMPLIFICATOR DE SUNETE JOASE

Figura 11. 11 Configurația unui sistem AES

Scanned with OKEN Scanner

Rețeaua existentă de sateliți constă în 4 sateliți principali și 7 secundari. Există 13 stații de sol (GES) disponibile care primesc direct semnalele sateliților.

3. *Furnizorul terestru de servicii în subrețele de comunicații*: subrețelele terestre conectează GES cu ARTCC. Această rețea are o legatură principală și una secundară. Componentele fiecarei legături includ modemuri, un sistem de interfață aer-sol și un serviciu de rețea de date.

4. *Centrul de control al rețelei de trafic aerian* (ARTCC): furnizează serviciul de control, cum ar fi deplasarea avioanelor pe piste și asigurarea respectării rutelor de zbor (separarea între aeronave este menținută conform standardelor). Componentele majore ale ARTCC sunt: Rețeaua Națională Aerospațială de Date privind spațiul aerian, FAA și modemurile.

Există trei componente pentru toate rețelele de telecomunicații: hard-ware, comunicațiile și sistemele procedurale. Interacțiunile dintre ele sunt complexe și dificil de modelat în conformitate cu scopul cazului studiat. Din acest motiv se limitează acest caz de studiu la modelarea componentelor hard-ware.

DATELE DE FIABILITATE

Ratele de defectare ale tuturor componenetelor sunt constante. Știind că majoritatea echipamentelor sunt perfectibile, se vor folosi datele referitoare la fiabilitățile impuse în proiectare de executant, date prezentate în tabelul 11.8

Tabelul 11.8 Ratele de defectare ale componentelor sistemului

Componenta/subsistem	Valori(defectări/oră)
Unitate date prin satelit(SDU)	$2,5\times10^{-6}$
Unitatea control comunicații(CMU)	$1,42\times10^{-6}$
Unitatea frecvență radio(RFU)	$0,8\times10^{-6}$
Rețea telecomunicație aeronautica(ATN)	$1,75\times10^{-4}$
Servicii de trafic aerian(ATS)	$2,85\times10^{-4}$
Unitatea automată de control (ADSU)	5×10^{-4}
Element descompunere semnal	3×10^{-6}
Element compunere semnal	5×10^{-6}
Antena de putere înaltă (HPA)	6×10^{-5}
Releu de putere înaltă(HPR)	4×10^{-6}
Antena înaltă amplificare (HGA)	4×10^{-5}

Scanned with OKEN Scanner

Antena joasă amplificare(LGA)	$3,5\times10^{-5}$
Antena zgomot redus(LNA)	2×10^{-5}
Unitatea direcționare fascicul radar(BSU)	$8,7\times10^{-6}$

SOLUȚIA

Pentru a analiza fiabilitatea rețelelor de telecomunicații pentru sistemele de trafic aerian, se estimează mai întâi fiabilitatea fiecărei componente majore, separat, după cum urmează.

1. *Stația aeronautică de sol* (AES): una dintre configurațiile aviatice propusă este prezentată în figura 11.11, figură care ilustrează cum componenetele AES sunt fizic conectate una la alta. Ea nu arată direct însa, relațiile dintre componente în ceea ce privește fiabilitatea sistemului aviatic aerian. Se presupune că antena HGA atinge aceeași funcționare (în termenii fiabilității) ca și antena de top tip LGA. Componentele celor două antene sunt conectate în paralel cu redundanța indicată, precum se arată în figura 11.12.

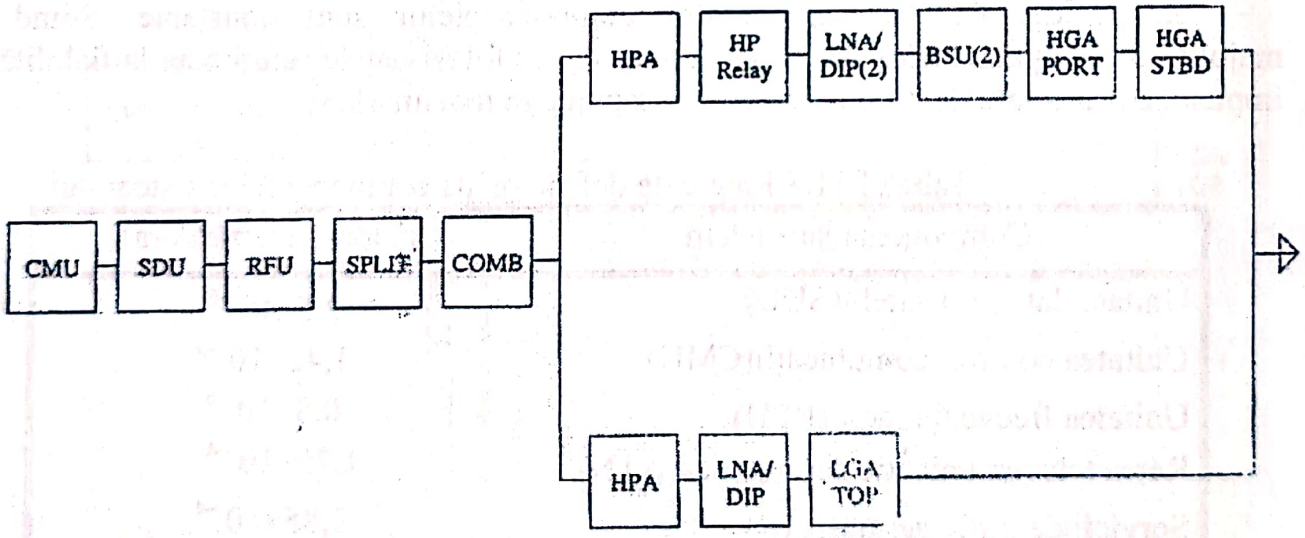


Figura 11.12 Diagrama bloc de fiabilitate pentru AES

Mai mult, AES este considerat operațional doar dacă este capabil să trimită *dar să și primească* informații. Aceasta implică faptul că elementele de descopunere și compunere semnal sunt conectate în serie și nu în paralel (v. Fig.11.12).

Scanned with OKEN Scanner

Există două unitați de direcționare radar conectate în paralel, astfel că fiabilitatea acestora va fi:

$$R_{BSU}(t) = 1-\left(1-e^{-8,7\times10^{-6}t}\right)\left(1-e^{-8,7\times10^{-6}t}\right)$$

$$R_{BSU}(t) = 2e^{-8,7\times10^{-6}t} - e^{-17,4\times10^{-6}t}$$

Similar, fiabilitatea LNA/DIP este:

$$R_{LNA}(t) = 2e^{-3,5\times10^{-5}t} - e^{-7\times10^{-5}t}$$

Fiabilitatea traiectoriei de sus a configurației paralele este:

$$R_{ts}(t) = e^{-14,4\times10^{-5}t}\left(2e^{-8,7\times10^{-6}t} - e^{-17,4\times10^{-6}t}\right)\left(2e^{-3,5\times10^{-5}t} - e^{-7\times10^{-5}t}\right)$$

$$R_{ts}(t) = 4e^{-18,77\times10^{-5}t} - 2e^{-19,64\times10^{-5}t} - 2e^{-22,27\times10^{-5}t} + e^{-23,14\times10^{-5}t}.$$

Fiabilitatea traseului de jos este:

$$R_{tj}(t) = e^{-11,5\times10^{-5}t}$$

$$R_{paralel}(t) = 1-\left(1-R_{ts}(t)\right)\left(1-R_{tj}(t)\right)$$

$$= 4e^{-18,77\times10^{-5}t} - 2e^{-19,64\times10^{-5}t} - 2e^{-22,27\times10^{-5}t}$$

$$+ e^{-23,14\times10^{-5}t} + e^{-11,5\times10^{-5}t} - 4e^{-30,27\times10^{-5}t}$$

$$+2e^{-31,14\times10^{-5}t} + 2e^{-33,77\times10^{-5}t} - e^{-34,64\times10^{-5}t} \qquad (11.19)$$

Fiabilitatea sistemului AES este:

$$R_{AES}(t) = e^{-12,72\times10^{-6}t} R_{paralel}(t)$$

$$R_{AES}(t) = 4e^{-2,004\times10^{-4}t} - 2e^{-2,091\times10^{-4}t} - 2e^{-2,354\times10^{-4}t} + e^{-2,441\times10^{-4}t}$$

$$+e^{-1,277\times10^{-4}t} - 4e^{-3,154\times10^{-4}t} + 2e^{-3,214\times10^{-4}t} + 2e^{-3,5042\times10^{-4}t} - e^{-3,591\times10^{-4}t}. \qquad (11.20)$$

Scanned with OKEN Scanner

2. *Comunicațiile prin satelit.* Sistemul curent de comunicații prin satelit include 4 sateliți principali și 7 secundari. Ratele de defectare ale sateliților principali sunt egale cu cele ale sateliților secundari. Se presupune că sateliții sunt sisteme nereparabile. Subsistemul satelit poate fi modelat ca unul *k* din *n*, deci *4* din *11*. Astfel,

$$R_{satelit}(t)=\sum_{r=4}^{11}\binom{11}{r}\left(e^{-\lambda_s t}\right)^r\left(1-e^{-\lambda_s t}\right)^{11-r}$$

sau:

$$R_{satelit}(t)=1-\sum_{r=0}^{3}\binom{11}{r}\left(e^{-\lambda_s t}\right)^r\left(1-e^{-\lambda_s t}\right)^{11-r}$$

unde λ_s este rate de deftare a satelitului :

$$R_{satelit}(t)=1-\left[\begin{array}{l}\left(1-e^{-\lambda_s t}\right)^{11}+11e^{-\lambda_s t}\left(1-e^{-\lambda_s t}\right)^{10}+\\+55\left(e^{-\lambda_s t}\right)^2\left(1-e^{-\lambda_s t}\right)^9+165\left(e^{-\lambda_s t}\right)^3\left(1-e^{-\lambda_s t}\right)^8\end{array}\right] \qquad (11.21)$$

Rata de defectare luată în calcul la proiectare este de $9{,}5\times10^{-5}$ defectări/oră.

3. *Subrețeaua terestră.* Aceasta subrețea are două legături identice în paralel. Fiecare legatură conține modemuri, un sistem de interfața aer-sol, un serviciu de rețea de date. Fiabilitatea subrețelei este:

$$R_{subretea}(t)=2e^{-\lambda_{retea}t}-e^{-2\lambda_{retea}t} \qquad (11.22)$$

unde λ_{retea} este rata de defectare a subrețelei. Valoarea luata în calcul la proiectare este de 3×10^{-6} defectări/oră.

4. *Centrul de control a rutei traficului aerian* (ARTCC). Componentele majore ale ARTCC sunt: Rețeaua Națională Aerospațială de Schimb de Date, FAA și modemurile, toate conectate în serie. Astfel, fiabilitatea ARTCC-ului este:

$$R_{ARTCC}(t)=e^{-\lambda_c t} \qquad (11.23)$$

Scanned with OKEN Scanner

unde λ_c este suma ratelor de defectare ale componentelor individuale ale centrului. Valoarea luata în calcul la proiectare este de $7{,}2\times 10^{-6}$ defectări/oră.

5. *Stațiile de sol* (GES). Există 13 GES-uri disponibile pentru a primi semnale de la sateliți. O comunicare de succes între sateliți și GES necesită un minim de 9 stații în regim de funcționare continuă. Astfel, fiabilitatea GES-lui este:

$$R_{GES}(t) = \sum_{r=9}^{13} \binom{13}{r} \left(e^{-\lambda_{GES} t}\right)^r \left(1 - e^{-\lambda_{GES} t}\right)^{13-r}$$

sau

$$R_{GES}(t) = e^{-9\lambda_{GES} t}\left[\begin{array}{l} 715\left(1 - e^{-\lambda_{GES} t}\right)^4 + 386\, e^{-\lambda_{GES} t}\left(1 - e^{-\lambda_{GES} t}\right)^3 \\ + 78\, e^{-2\lambda_{GES} t}\left(1 - e^{-\lambda_{GES} t}\right)^2 + 13\, e^{-3\lambda_{GES} t}\left(1 - e^{-\lambda_{GES} t}\right) + e^{-4\lambda_{GES} t} \end{array}\right] \tag{11.24}$$

unde λ_{GES} este rata de defectare a stației de sol și valoarea de proiectare este $3{,}75\times 10^{-6}$ defectări/oră.

Fiabilitatea rețelei de telecomunicații pentru sistemul de control al traficului aerian este obținută luând în considerație cele 5 componente majore hard-ware al sistemului serie. Astfel:

$$R_{sistem}(t) = R_{AES}(t) \cdot R_{satelit}(t) \cdot R_{subretea}(t) \cdot R_{ARTCC}(t) \cdot R_{GES}(t) \tag{11.25}$$

Variația în timp a fiabilității componentelor individuale și cea a întregului sistem sunt prezentate în figura 11.13.

IMPORTANȚA COMPONENTELOR

Folosind măsurarea gradului de importanță dată de ecuația (2.71), se obține:

$$G(q(t)) = 1 - (1 - q_{AES}(t))(1 - q_{satelit}(t))(1 - q_{subretea}(t))(1 - q_{ARTCC}(t))(1 - q_{GES}(t))$$

La t =1.000 ore, se obține:

$$I_B^{AES}(1.000) = (1 - q_{satelit}(1.000))(1 - q_{subretea}(1.000)) \times (-1 q_{ARTCC}(1.000))(1 - q_{GES}(1.000))$$

Scanned with OKEN Scanner

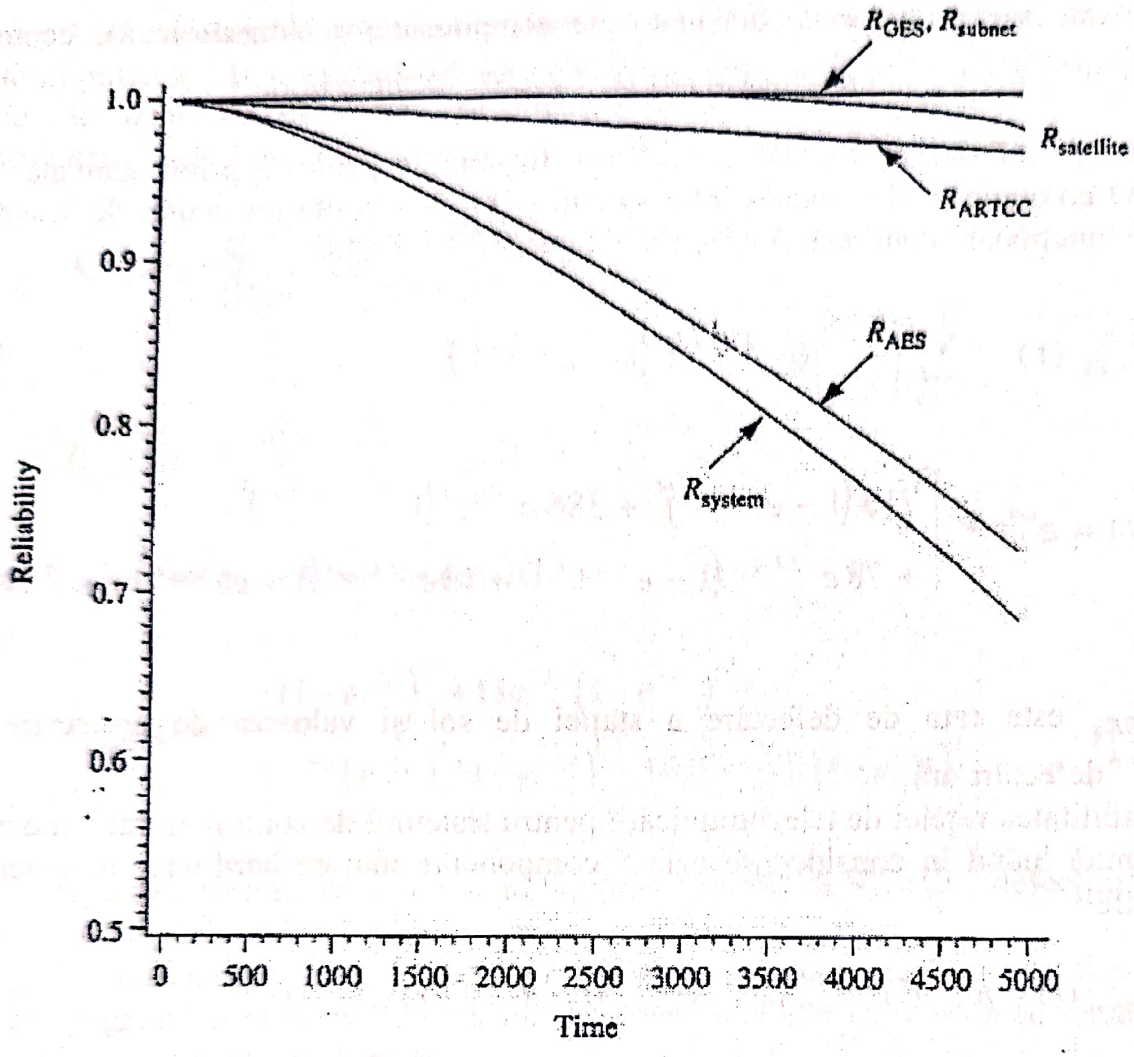


Figura 11.13 Fiabilitatea sistemului şi a subsistemelor

$$I_B^{AES}(1.000) = 0,992816$$
$$I_B^{SATELIT}(1.0000) = 0,966502$$
$$I_B^{subretea}(1.000) = 0,966510$$
$$I_B^{ARTCC}(1,000) = 0,973387$$
$$I_B^{GES}(1.000) = 0,966502$$

AES are cel mai înalt grad de importanță. În conformitate cu aceasta, are cel mai mare impact asupra fiabilității generale a sistemului.

Scanned with OKEN Scanner

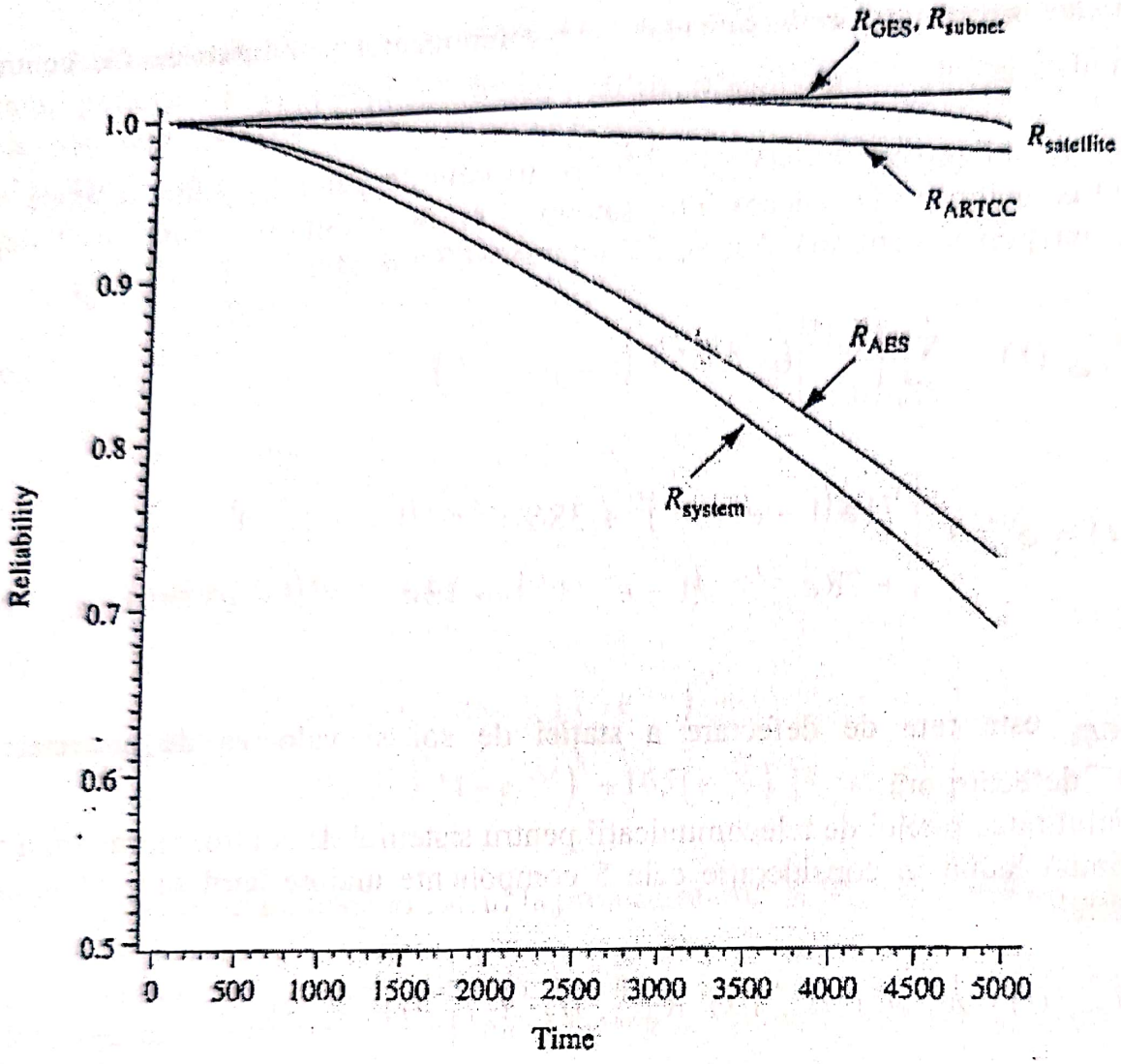


Figura 11.13 Fiabilitatea sistemului şi a subsistemelor

$I_B^{AES}(1.000) = 0,992816$

$I_B^{SATELIT}(1.0000) = 0,966502$

$I_B^{subretea}(1.000) = 0,966510$

$I_B^{ARTCC}(1,000) = 0,973387$

$I_B^{GES}(1.000) = 0,966502$

AES are cel mai înalt grad de importanță. În conformitate cu aceasta, are cel mai mare impact asupra fiabilității generale a sistemului.

Scanned with OKEN Scanner

Majoritatea componentelor AES trebuiesc reproiectate pentru a reduce efectiv rata de defectare a sistemului. Similar, componentele centrului de control a rutei traficului aerian cer schimbări de proiectare sau redundanță pentru unele componente și legături.

Fiabilitatea stațiilor de sol depășește minimum de modificări din sistem. Numărul lor este destul de mare pentru a susține o redundanță inerentă a sistemului.

Această analiză simplă arată că tehnicile fiabilității și modelării pot utilizate cu succes în proiectarea efectivă a configurațiilor complexe.

CAZUL 5. PROIECTARE DE SISTEM PRIN UTILIZAREA OBIECTIVELOR DE FIABILATE

Serviciul de telecomunicații continuu este controlat de obiectivele proiectării disponibilității rețelelor, a segmentelor de rețea și a elementelor de rețea. În general, aceste obiective intenționează să controleze intervalul de timp în care rețelele sau părți din rețele nu sunt în stare să atingă cerințele funcționării. Obiectivele disponibilității sunt exprimate de un singur număr egal cu procentajul pe termen lung de timp la care se așteaptă ca sistemul (rețeaua, segmentul de rețea sau elementul de rețea) să-și execute funcționarea normal. Aceste obiective pot influența semnificativ calitatea serviciilor.

Acest caz abordează o parte din implicațiile utilizării obiectivelor tradiționale de proiectare a disponibilității în controlul performanțelor. El poate fi considerat ca un prim pas în aplicarea obiectivelor curente de disponibilitate în *proiectarea unui singur sistem* iar mai apoi, prin analiza rezultatelor, poate fi extins la *o populație de sisteme, fiecare dintre acestea fiind proiectat cu respectarea aceloraşi obiective de disponibilitate.*

Sunt abordate metode noi ce descriu performanțele de disponibilitate și cum acestea pot fi folosite pentru:

1. evaluarea rețelei curente și a obiectivelor de funcționare;
2. sprijin în dezvoltarea unui set de obiective de disponibilitate de top pentru noi servicii;
3. furnizarea unui control de calitate al performanțelor rețelei mult mai bun.

Tematica abordată în acest caz este de actualitate deoarece continuă să fie puse întrebări despre interpretarea legată de obiectivele disponibilității proiectate pentru noi servicii și tehnologii. Iată două dintre aceste întrebări:

- Un obiectiv pentru timpul total de nefuncționare a unui sistem al anilor 1950 - 1960 cerea ca acesta *să nu fie mai mare de 2 ore în total în timp de 40 de ani.* Același obiectiv, pentru un sistem similar, astăzi este exprimat astfel: *să fie de*

Scanned with OKEN Scanner

maximum 3 minute pe an. Dacă acest sistem este defect mai mult de 3 minute pe an înseamnă că a eşuat şi nu şi-a îndeplinit obiectivul din proiectare ?

- Dacă, după o perioadă de câţiva ani, există astfel de sisteme în cadrul populaţiei care: nu au timpi de nefuncţionare, au perioade de nefuncţionare mai mici decât cele preconizate în proiectare sau mai mari decât acestea, înseamnă că a fost atins obiectivul de proiectare al sistemului ?

După cum se va vedea, răspunsul la prima întrebare ar fi: *nu este obligatoriu*. Răspunsul la cea de a doua întrebare este acela că trebuie să interpretăm *obiectivul din proiectare* al modelului ca fiind îndeplinit dacă *media distribuţiei populaţiei timpilor de nefuncţionare* nu excede valoarea obiectivului.

Se va discuta mai întai despre obiectivele tradiţionale ale disponibilităţii, relaţiile lor cu obiectivele de fiabilitate proiectată a echipamentului şi cum pot fi acestea interpretate ca o măsură a performanţei medii de funcţionare pe termen lung. Apoi, se va considera o populaţie de sisteme identice, fiecare proiectat să îndeplinească acelaşi obiectiv de disponibilitate şi se va preciza cum performanţa timpilor de nefuncţionare poate varia în cadrul populaţiei de sisteme şi utilizatori. Alte discuţii voir fi despre diferenţele performanţelor tipilor de nefuncţionare cumulativi ce se poate aştepta de la un sistem simplu sau dublu având acelaşi obiectiv de disponibiliate şi acesaşi timp mediu de reparare unitar. Performanţa extremă este considerată prin a arăta cum *timpul lung de reparare* experimentat pe o perioadă limitată de timp poate varia în cadrul populaţiei de sisteme. Se va concluziona discutând modul în care aceste măsuri ale performanţelor timpilor de nefunţionare ai populaţiei pot fi utilizate în a evalua efectele obiectivelor de disponibilitate proiectată a sistemului asupra performanţelor funcţionării la utilizatorul final şi în a ajuta la dezvoltarea unor obiective de disponilitate de top.

OBIECTIVELE DE DISPONIBILITATE PROIECTATĂ

Un obiectiv tipic de disponibilitate poate prevedea că un anumit sistem sau serviciu *poate fi disponibil cel putin 99,8 % din timp*. Considerând că timpul de funcţionare reprezintă timpul în care acel sistem sau serviciu îşi exercită funcţiunile în condiţiile cerute, o interpretare, utilizată în mod curent, a acestui obiectiv, o interpretare folosită în mod curent este aceea că, atunci când măsurarea/observarea acoperă un interval suficient de mare de timp, se poate scrie:

$$\frac{\textit{timpul de functionare cumulat al sistemului}}{\textit{timpul de masurare cumulat}} \geq 0{,}998 \qquad (11.26)$$

Scanned with OKEN Scanner

Timpul de observare cumulat din ecuația (11.26) este *timpul de funcționare cumulat*, plus timpul când sistemul nu furnizează servicii chiar dacă ar trebui să le facă. Acesta din urmă include în general timpii de cădere și constă în perioade de reparare ca urmare a defectării sistemului, în perioade de timp necesare întreținerii planificate și altele de tipul *ieșit din funcțiune.*

Definiția unei disponibilități instantanee dată în capitolul 3.4, este în corelație cu ecuația (11.26) și se poate aplica atât sistemelor cât și serviciilor care le susțin.

În exemplul de mai sus nondisponibilitatea este de 0,0002 sau 0,2%. Aceasta corespunde cu 1.051,2 minute sau 17,5 ore/an, ca timp așteptat de nefuncționare. Similar, disponibilitate de stare staționară a sistemului, A, este definită ca:

$$A = \lim_{t \to \infty} P \quad \{sistemul\ este\ in\ functiune\ la\ timpul\ t\} \tag{11.27}$$

Din ecuațiile (11.26) și (11.27), se obține:

$$E\{timp\ de\ functionare\ cumulat\ al\ sistemlui\ pe\ o\ perioada\ T\ de\ stare\ stationara\} = A \times T \tag{11.28}$$

unde E denotă valoarea așteptată. Conform capitolului 3, disponibilitatea îndeplinită este:

$$A = \frac{MTBF}{MTBF + MTTR} \tag{11.29}$$

unde $MTBF$ și $MTTR$ sunt media timpilor de bună funcționare, respectiv media timpilor de reparare.

Nondisponibilitatea corespunzatoare stării staționare, $\overline{A}$, este:

$$\overline{A} = 1 - A$$

$$\overline{A} = \frac{MTTR}{MTBF + MTTR} \tag{11.30}$$

Știind că $\lambda = 1/MTBF\ si\ \mu = 1/MTTR$ (λ este rata de defctare a sistemului și μ este rata de reparare a sistemului atunci când distribuțiile timpilor de defectare și

Scanned with OKEN Scanner

reparare sunt exponenţiale, cum ar fi cazul luat în studiu), prin înlocuire în ec.(11.28), se obţine:

$$E\{\text{timp de nefunctionare cumulat pe o perioada } T \text{ de stare stationala}\} = \frac{\lambda T}{\lambda + \mu} \tag{11.31}$$

Măsurile de performanţă date de disponibilitatea de stare staţionară din ecuaţia (11.29), de nondisponibilitatea aceleiaşi stări din ecuaţia (11.30), sau de timpul aşteptat de nefuncţionare dat de ecuaţia (11.31), sunt determinate din sistemul *MTTR* şi *MTBF*.

MTBF este o caracteristică de bază în proiectare, în timp ce *MTTR* este caracteristic unei politici particulare de mentenanţă şi funcţionare. *MTTR* mai poate depinde de asemenea şi de trăsăturile caracteristice ale proiectării cum ar fi modularitatea sistemului, capabilitatea de auto-diagnosticare sau alţi factori.

Sistemele sunt proiectate să îndeplinească obiectivele de disponibilitate prin ajutarea valoarilor lui *MTBF* şi *MTTR* caracteristice, utilizând modelul dat de ecuaţia (11.31). De exemplu, dacă obiectivul de disponibilitate pentru o unitate singulară simplă este de 99,8 %, atunci obiectivul corespunzator de timp de nefuncţionare este de 1.05,2 minute de nefuncţionare/an.

Folosind ca bază 525.600 minute/an, ecuaţia (11.31) poate fi utilizată în descrierea acestor obiective sub forma:

$$\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \times 525.600 \quad \leq \quad 1.054,2 \quad \text{min/}an \tag{11.32}$$

Presupunând un timp mediu de reparare de sub 4 ore ($1/\mu \leq 240\,\text{min}$), din ecuaţia (11.32) rezultă că obiectivul de disponibilitate va fi indeplinit dacă rata de defectare unitară, λ, satisface relaţia:

$$\lambda \leq 4,38 \quad \text{avarii/an} \tag{11.33}$$

Aceasta este echivalent cu o medie a timpului de defctare ($1/\lambda$) de cel puţin 1.996 ore şi este un obiectiv din proiectare al fiabilităţii sistemului.

Aceleaşi principii se aplică mai multor sisteme complexe. De exemplu, două unităţi simple identice, funcţionând independent într-un mod paralel de acţiune a sarcinii, vor avea o non-disponibilitate a sistemului dată de:

Scanned with OKEN Scanner

$$\overline{A}=\left[\left(\lambda/(\lambda+\mu)\right)\right]^2 \qquad (11.34)$$

În ec. (11.34), λ şi μ sunt, respectiv, ratele de defectare şi reparare pentru fiecare unitate simplă. De exemplu, dacă obiectivul de ne-functionare a sistemului paralel este de două minute/an, ec. (11.34) poate fi utilizată în scrierea obiectivului sub forma :

$$[(\lambda/(\lambda+\mu))]^2 \text{ x } 525.600 \leq 2 \text{ minute/an} \qquad (11.35)$$

Pentru a îndeplini obiectivul specificat de ecuaţia (11.35), fiecare unitate simplă din sistemul paralel trebuie să satisfacă condiţia :

$$\frac{\lambda}{\lambda+\mu} \text{ x } 525.600 \leq 1.025{,}28 \text{ minute (17 ore)/an} \qquad (11.36)$$

Presupunând un timp de reparare mediu de mai mult de 4 ore, rezultă din ecuaţia (11.36) că obiectivul de ne-funcţionare al sistemul paralel se va îndeplini dacă rata de defectare λ a fiecărei unităţi simple va satisface condiţia :

$$\lambda \leq 4{,}2 \text{ avarii/an} \qquad (11.37)$$

Aceasta corespunde unui *MTBF* de mai puţin de 2.047 ore pentru fiecare unitate simplă ale sistemului dublu.

În exemplu de mai sus, acelaşi obiectiv de ne-funcţionare de 2 minute/an poate fi îndeplinit prin utilizarea unei unităţi simple în locul celor două montate în paralel. În acest caz, cu un timp mediu de reparare de patru ore, *MTBF*-ul unei unităţi simple ar fi de 1.051,196 ore sau aproape 119 ani.

În general, non-disponibilitatea unui sistem complex va fi o funcţie a ratelor de defectare şi reparare a elementelor simple ale reţelei :

$$\overline{A}=\phi(\lambda_1,\mu_1,\lambda_2,\mu_2,.....).$$

Forma acestei funcţii generale depinde de arhitectura sistemului, configuraţia componentelor şi de procedurile de funcţionare, după cele prezentate în capitolele 2 şi 3. Referitor la exemplele anterioare, obiectivele de ne-funcţionare ale sistemelor pot fi utilizate pentru a selecta valorile de proiectare ale ratelor de defectare şi reparare ale elementelor reţelei prin aplicarea relaţiei :

Scanned with OKEN Scanner

$$\phi(\lambda_1, \mu_1, \lambda_2 .....) \text{ x } 525.600 \leq \text{ obiectivul de ne-funcţionare (minute/an)} \quad (11.38)$$

În principiu ecuaţia (11.38) reprezintă un subiect de restricţie a performanţei la care costul sistemului poate fi minimizat.

Având în vedere acestea, în acest caz se va discuta despre o serie de idei legate de următoarea întrebare: să presupunem că un sistem este proiectat să atingă un obiectiv de disponibilitate folosind procedura precizată mai sus. Care ar trebui să fie proprietăţile indicatorului de performanţă (ec. 11.26), atunci când sunt puse în funcţiune un număr mare de sisteme ?

DISPONIBILITATEA FUNCŢIONĂRII PERFORMANTE

Obiectivele de ne-funcţionare intenţionează să controleze intervalul de timp în care, reţelele, segmente ale reţelelor şi elemente ale acestora nu pot furniza servicii. După cum s-a discutat, aceste obiective sunt definite tipic ca un singur număr egal cu maximum timpului de aşteptat de ne-funcţionare pe an. Acelaşi obiectiv de ne-funcţionare poate fi îndeplinit utilizând arhitecturi diferite ale sistemului şi este foarte important să înţelegem posibilele diferenţe de performanţă rezultate pentru diferite implementări.

Desigur, prin definiţie, probabilitatea ca un sistem să nu fie în stare de a executa funcţia cerută este egală cu non-disponibilitatea sistemului. Procedura de proiectare a obiectivelor de disponibilitate precizată mai sus conduce la următoarea interpretare a obiectivului de ne-funcţionare:

$$P\left\{\begin{matrix} \textit{sistemul nu poate} \\ \textit{executa functia ceruta} \end{matrix}\right\} \leq \frac{\textit{obiectivul anual de nefuntionare}(\min)}{525.600 \text{ min/ } \textit{an}}$$

În timp ce aceasta este o măsură importantă de performanţă a sistemului, pentru un sistem cu o tentativă de rată non-efectivă nu este corect ca ea descrie întreaga serie de performanţe ce poate avea loc la o populaţie de astfel de sisteme. În particular, dacă fiecare sistem din populaţie îndeplineşte obiectivul se poate spune că fiecare sistem are un *MTBF* şi un *MTTR* corespunzător obiectivelor specifice.

Oricum, timpii individuali de defectare ai sistemului şi cei corespunzători de reparare vor prezenta variaţii mari şi vor fi diferiţi de valorile medii aşteptate care au fost prevăzuţi în proiectare. Rezultatul este că aceste observări anuale ale timpilor de ne-

Scanned with OKEN Scanner

funcționare caracteristici populației vor diferi față de valorile obiectiv. Astfel, variațiile timpilor de ne-funcționare cumulați pe un anumit an va avea loc la întreaga populație de sisteme. Dacă aceste sisteme sunt proiectate să îndeplinească un anumit obiectiv, atunci valoarea medie a distribuției timpilor de ne-funcționare ai populației într-un an nu ar trebui să excedă valoarea obiectiv.

Evaluând în conformitate cu obiectivele fiabilității, ne putem opri aici pur și simplu prin stabilirea faptului dacă media anuala a timpilor de ne-funcționare ai populației eșantionate va excede valoarea obiectiv. Un simplu test ipotetic ne va face să înțelegem importanța calculelor statistice de care este nevoie în rezolvarea problemei. Oricum, prin folosirea corectă a informațiilor adiționale conținute în modelul care urmărește procedura *proiectării obiectivelor de disponibilitate*, se poate obține acest parametru cheie de satisfacere a funcționării. Despre această problemă se va discuta mai târziu, după analiza tipurilor de distribuții caracteristice timpilor de ne-funcționare ai populației.

DISTRIBUȚIA CUMULATIVĂ A TIMPILOR DE NEFUNCȚIONARE

Pentru a ilustra modul în care timpii de ne-funcționare anuali pot varia în cadrul populației, se va considera un sistem cu o configurație de o singură unitate. Se presupune din nou că obiectivul cumulativ al timpilor de ne-funcționare este 17,5 ore (1.052,2 minute) pe an iar media timpului de reparare este de 4 ore. Apoi, folosind ecuația (11.32), parametrii $MTBF = 1/\lambda$ și $MTTR = 1/\mu$ sunt:

$MTBF = 1.996$ ore ; $MTTR = 4{,}0$ ore.

Figura 11.14. prezintă modul în care timpul de ne-funcționare cumulat pe perioada unui an intervine în funcționarea unei singure unități.

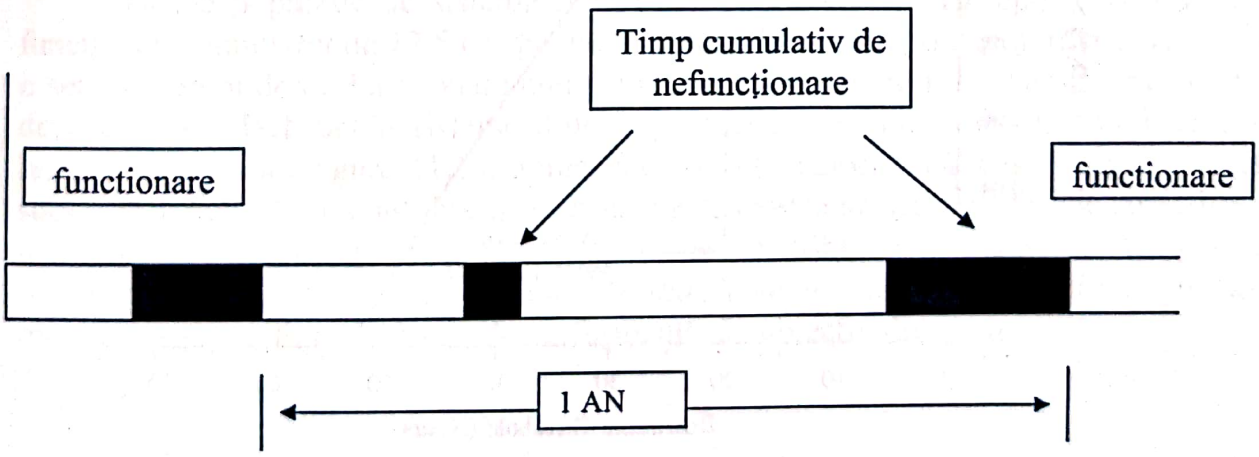


Figura 11.14 Timpul de ne-funcționare cumulat

Scanned with OKEN Scanner

Timpul de ne-funcționare cumulat pe o perioadă dată de timp depinde atât de timpii de defectare cât și de cei de reparare. După cum s-a văzut deja, aceşti timpi vor varia de la un tip de defectare la altul şi de la un sistem la altul. Aceasta implica faptul că ei, luați în calcul pe perioada unui an de zile, vor avea un număr de distribuții pentru unitățile populației. În particular, folosind un model Markov este posibil să se obțină distribuția preconizată pentru timpii de ne-funționare cumulați anual, după cum s-a prezentat în cap. 3. Această distribuție este o funcție, $D(T)$, care depinde de *MTBF*-ul şi *MTTR*-ul unității simple şi este definită de :

$D(t) = P\{\text{timpul de ne-funcționare cumulat pe an este} \leq T\}$.

Folosind un an ca bază, fig. 11.15 prezintă complementaritatea stării staționare a distribuției cumulative a timpilor de ne-funcționare 1 - $D(T)$ atunci când obiectivul de ne-funcționare este în medie de 17,5 ore/an şi media timpilor de reparare este de 4 ore.

Figura 11.15 ilustrează consecințe importante ale funcționării utilizând obiectivele

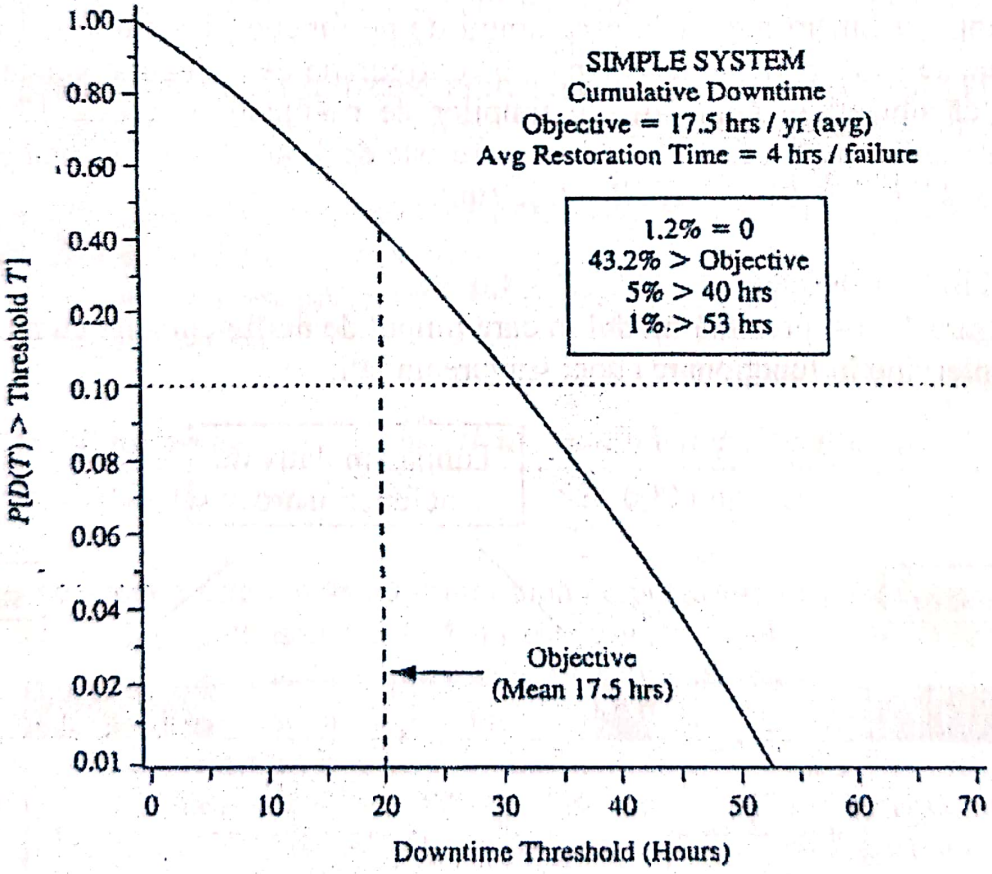


Figura 11.15 Distribuția tipului de ne-funcționare cumulat la o unitate simplă

Scanned with OKEN Scanner

luate în calcul la proiectare: media timpilor de ne-funcţionare de 17,5 ore pe an şi o medie a timpilor de reparare de 4 ore. În particular, se observă că în timpul unui an, 43,2% din unităţile populaţiei se preconizează să aibă timpul de ne-funcţionare cumulativ ce excede valoarea obiectiv.

De exemplu, o unitate particulară a populaţiei având ca obiectiv o medie cumulată a timpilor de ne-funcţionare de 17,5 ore are aproximativ 20 % şanse să mai rămână încă 25 de ore sau mai mult chiar, în stare de ne-funcţionare, pe perioada unui an. Alţi doi indicatori importanţi de funcţionare au probabilitatea *zero ne-funcţionare* într-un an dat şi probabilitatea de a excede un anumit prag dat, în timp de un an. După cum mai rezultă din figura 11.15, aproape 1,2 % din unităţile populaţiei se preconizează să aibă *zero ne-funcţionare* într-un an. În schimb, cca. 5 % din populaţia eşantionului se preconizează a avea timpul de ne-funcţionare cumulat mai mare de 40 de ore.

Iată o serie de concluzii importante referitoare la un sistem proiectat pentru un anumit obiectiv de ne-funcţionare, interpretate ca o medie pe termen lung:

- valoarea obiectiv va fi estimată ca un *timp mediu* ce acoperă o perioadă de timp suficient de mare ;
- într-o populaţie numeroasă de astfel de sisteme, *timpul mediu de ne-funcţionare* anual al acesteia trebuie să corespundă obiectivului propus;
- un singur sistem poate avea timpul de ne-funcţionare anual care să exceadă valoarea obiectiv în timp ce obiectivul din proiectare al întregii populaţii este îndeplinit.

În particular, nu este acceptată în mod curent practica de a interpreta obiectivul din proiectare ca valoarea maximă pe care nici un sistem nu o va putea excede în funcţionare.

Dacă o populaţie de sisteme îndeplineşte un obiectiv al timpului mediu de ne-funcţionare cumulativ de 17,5 ore pe an, în condiţiile de funcţionare normale, vor rezulta o serie de timpi de ne-funcţionare cumulativi anuali, după cum ne arată figura 11.15. Pe de alta parte, dacă unele sisteme dintr-o populaţie prezintă astfel de timpi ce exced limitele deduse din figura 11.15, atunci factorii alţi factori decât cei cauzaţi de variaţia statistică nominală pot contribui la aceasta şi este nevoie de acţiuni speciale corective. Ca o măsură a performanţei tipice, pot fi utilizate distribuţiile timpilor cumulaţi de ne-funcţionare anuali, împreună cu tehnicile *diagramelor de control statistice*, pentru a monitoriza şi menţine nivelurile de performanţă ale obiectivului.

Scanned with OKEN Scanner

DISTRIBUȚIA CELUI MAI ÎNDELUNGAT TIMP DE REPARARE

Fiecare sistem din populația studiată îndeplinind aceleași obiective ale mediei timpilor anuali de ne-funcționare cumulați se va caracteriza prin timpi de reparare variabili și va fi subiectul celui mai îndelungat/maxim timp de reparare pe perioada particulară a unui an dat. În cadrul unei populații, vom avea de-a face cu o distribuție corespunzătoare a timpilor maximi de reparare. În contrast cu distribuția timpilor anuali de ne-funcționare cumulați ai populației, distribuția timpului maxim de reparare generează performanțe inferioare asociate unei singure defectări și reprezintă o măsură importantă a calității în funcționare rezultate din obiectivele specifice de proiectare. Folosind exemplul precedent al modelului Markov de sistem simplu în care obiectivul timpului de ne-funcționare mediu cumulativ este de 17,5 ore/an și cel mediu de reparare este 4 ore, figura 11.16 prezintă distribuția preconizată a timpului maxim de reparare pe perioada unui an de zile. Figura arată că în cazul folosirii unui *MTTR* de 4 ore, timpul maxim de reparare experimental pare să fie mai mare decât valoarea medie. În general, cu cât au loc mai multe defectări, potențialul timpilor maximi de reparare crește.

Deoarece timpul de ne-funcționare cumulativ experimental pe perioada unui an nu va fi mai mic decât timpul singular maxim de reparare, figura 11.16 prezintă de asemenea

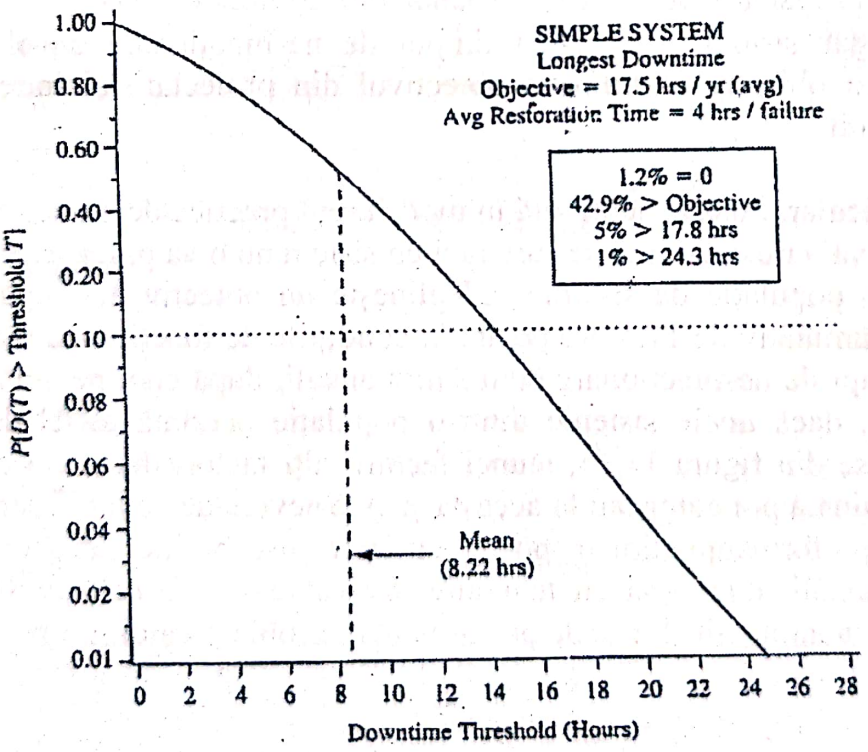


Figura 11.16.Distribuția timpului maxim de reparare pentru un sistem simplu

Scanned with OKEN Scanner

faptul că timpul de ne-funcționare cumulat al sistemului, determinat experimental pe perioada unui an, poate fi mai mare decât valoarea medie din proiectare.

În particular, acest exemplu arată că 5,3 % din sistemele populației eșantionului sunt așteptate a avea un timp de ne-funționare singular care să exceadă valoarea de proiectare de 17,5 ore de timp cumulativ de ne-funcționare pe an.

Dacă o populație de sisteme îndeplinește un obiectiv al timpului mediu de ne-funcționare cumulat de 17,5 ore pe an, atunci condițiile de operare nominale vor rezulta, după cum rezultă din fig. 11.16, din timpii maximi individuali de reparare. Pe de altă parte, dacă unele sisteme ale populației au timpi de reparare ce exced aceste limite așteptate, atunci alți factori decât aceștia, cauzați de variații nominale statistice, pot contribui la creșterea timpilor de reparare și este necesară o acțiune de mentenanță corectivă.

Ca o măsură a performanței extreme, distribuțiile timpilor maximi de reparare pot fi utilizate, împreună cu tehnicile diagramelor statistice de control, pentru a monitoriza și menține nivelurile de performanță a obiectivului.

EVALUAREA OBIECTIVELOR DE DISPONILITATE PLANIFICATE

Pentru a furniza continuitatea funcționării la utilizator și capacitățile rețelei, obiectivele disponibilității planificate/proiectate ar trebui să stabilească controlul întregului șir al performanțelor rezultate din obiective. Exemplul menționat în introducere prevede furnizarea unei capacități de funcționare a rețelei cu o disponibilitate de 99,8% din timp. După cum s-a discutat, aceasta poate fi interpretat ca un timp mediu de ne-funcționare de 1.051,2 minute pe an și poate fi determinat prin selectarea arhitecturii și a elementelor rețelei al căror performanțe combinate ale timpilor medii de ne-funcționare conduc la îndeplinirea obiectivului. În orice caz, distribuția rezultată a timpilor de ne-funcționare ai populației arată că gama așteptată de performanțe în funcționare pentru un grup de utilizatori finali nu este descrisă în totalitate de un singur obiectiv *timp de ne-funcționare,* fie pentru funcționare fie pentru proiectarea rețelei.

În următoarele secțiuni se va prezenta modul cum selecția obiectivelor de disponibilitate în proiectarea și funcționarea rețelei pot fi mai bine evaluate atunci când întreaga gamă a performanțelor timpilor de ne-funcționare poate fi descrisă utilizând informații provenite din distribuția timpilor de ne-funcționare ai populației.

EVALUAREA OBIECTIVELOR DE OPERARE A REȚELEI CURENTE

Standardele actuale ale rețelei de telecomunicații include obiectivele ale timpilor de ne-funcționare pentru multe dintre elementele rețelei și pentru serviciile

Scanned with OKEN Scanner

corespunzătoare. Ca un exemplu, se presupune că obiectivul tipului mediu de ne-funcționare ce caracterizează o rețea normală este de 2 minute pe an. Pentru a evalua întregul șir de performanțe ce se pot preconiza de la acest obiectiv, a fost folosit un model de sistem paralel Markov pentru a preciza distribuția cumulativă anuală a timpilor de ne-funcționare. Figura 11.17 prezintă această distribuție complementară pentru un obiectiv de 2 minute pe an și o comparație cu distribuțiile care vor rezulta din obiectivele de 1 sau

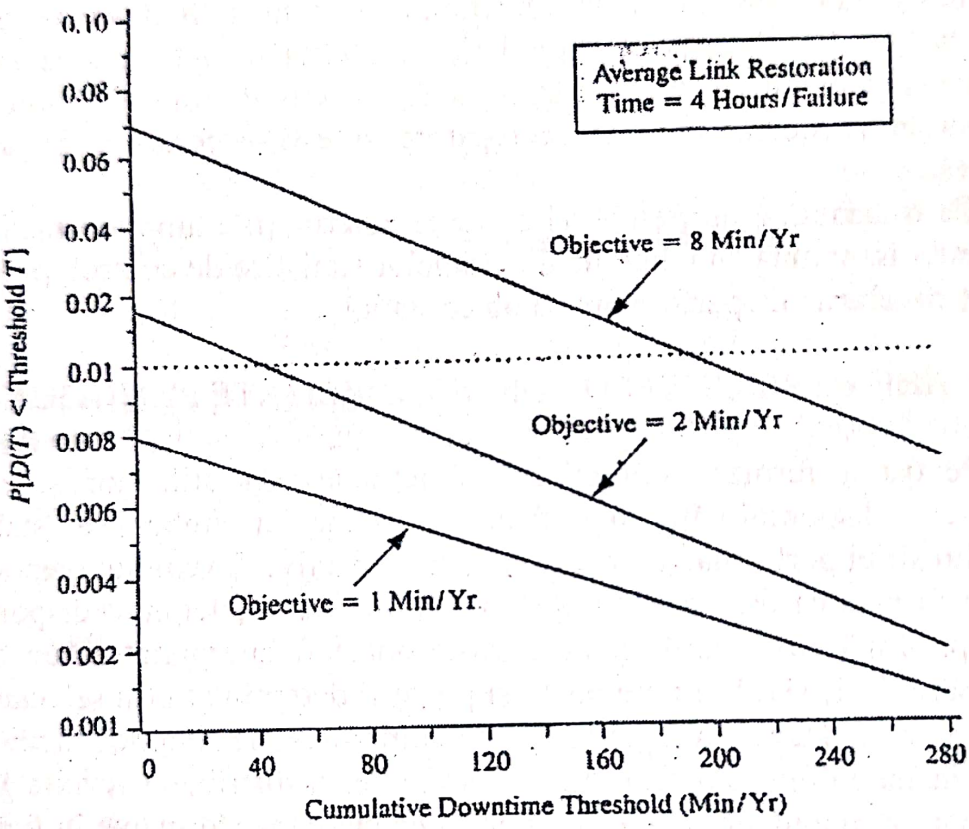


Figura 11.17 Distribuțiile timpilor de ne-funcționare anuali ai rețelei

8 minute pe an. Fiecare distribuție este bazată pe un timp mediu de reparare de 4 ore/defectare. Figura 11.17 scoate în evidență consecințele importante ale folosirii unui anumit obiectiv particular al timpului mediu de ne-funcționare pentru semnalarea accesului la rețea. În particular, cu obiectiv de 2 minute pe an, aproape 1% din oficiile finale, pentru perioada unui an de zile, se preconizează că vor fi incapabile să acceseze serviciile rețelei pentru cel puțin o oră. Cu un obiectiv de un minut, procentajul va descreşte la 0,5 %, în timp ce va creşte la aproape 4 % la un obiectiv de 8 minute pe an.

Scanned with OKEN Scanner

Spre exemplu, obiectivul 2 minute este echivalent cu o rată a tentativelor ineficiente de acces de $2/525.600 = 3,8 \times 10^{-6}$.

În Tabelul 11.9 sunt prezentate schematizat aceste caracteristici de performanță.

Tabelul 11.9 Performanțe de acces la rețea

Obiectivul *Timp ne-funcționare*	Rata ineficientă de acces	Oficii cu acces Timp ne-funcționare > 1ora/an
1	$1,9 \times 10^{-6}$	0,5%
2	$3,8 \times 10^{-6}$	1,0%
8	15×10^{-6}	4,0%

Folosind informații ca cele din tabelul 11.9, pot fi revizuite şi re-proiectate aceste rețele astfel încât să fie din ce în ce mai performante.

STABILIREA OBIECTIVELOR DE TOP ALE DISPONIBILITĂȚII

Planificarea performanțelor de top pentru un serviciu nou începe cu o înțelegere cuprinzătoare a necesităților clientului, a aşteptărilor lui şi cu percepția calității performanțelor. Obiectivele de performanță la utilizator sunt apoi specificate să îndeplinească aceste aşteptări, iar mai apoi sunt alocate rețelelor capabile a fi proiectate şi implementate să îndeplinească obiectivele.

În timp ce acestea ar fi de dorit, este dificil uneori să fie îndeplinite deoarece, în practică, există capacități ale rețelei, posibile de ajustat prin elemente auxiliare, care sunt folosite pentru a suporta o anumită operare dată. Atunci, proiectanții de servicii trebuie să determine performanța de funcționare la utilizator pentru care este proiectată rețeaua.

Obiectivele disponibilității serviciului sunt adesea obținute în acest fel printr-un singur număr cum ar fi: 99,8%. Acest număr simplu ar putea fi interpretat ca o valoare medie a ratei de încercare ineficientă a serviciului sau ca o medie a timpilor anuali de ne-funcționare cumulați ai unei populații de utilizatori; dar cum exemplele anterioare au arătat că o medie singulară nu descrie în modul cel mai adecvat gama performanțelor , aceasta este egal cu a avea experiență.

În consecință, în dezvoltarea obiectivelor de operare la utilizatori, trebuie ca în multe cazuri să se folosească modele de disponibilitate a rețelei pentru a prezice distribuția timpilor de ne-funcționare cumulativi ai populației şi pentru a se afla dacă gama preconizată este acceptabilă pentru tipul de serviciu pentru care a fost proiectată rețeaua.

Scanned with OKEN Scanner

Având acestea că bază, schimbările posibile în obiectivele timpilor de nefuncţionare, luaţi în calcul la proiectare, pentru porţiuni critice ale reţelei, pot conduce la un control mult mai bun al performanţelor din funcţionare.

II. STUDII DE CAZ PROPUSE SPRE REZOLVARE

CAPITOLUL 6

6.1. Următoarele date de defectare(ore) sunt obţinute printr-un test de uzură a unui angrenaj elicoidal: 250; 390; 550; 800; 1.150; 1.790; 2.860; 4.780; 6.000; 9.100; 13.500; 19.600; 22.000; 24.800; 28.200, 30.980; 34.700; 40.800; 46.000, 50.000; 52.900; 59.000; 63.600; 69.700; 74.650, 110.000.

a. Distribuţia exponenţială se potriveşte datelor ?
b. Este prima defectare anormal de timpurie ?
c. Ultima defectare este anormal de târzie ?
d. Dacă datele se potrivesc unei distribuţii exponenţiale, care este *MTBF*-ul estimat ?

6.2. Se consideră următoarele date de defectare ale anvelopelor(km) obţinute în urma unui test de uzură: 4.500; 4.660; 5.600; 7.800; 9.500; 11.000; 17.200; 22.500; 26.300; 29.000; 35.000; 41.000; 48.500; 51.000; 72.000.

a. Să se verifice dacă poate fi folosită distribuţia exponenţială în analiza datelor.
b. Care sunt parametrii distribuţiei exponenţiale ?
c. Să se stabilească o limită de încredere de 95% a parametrilor distribuţiei.
d. Să se stabilească o limită de încredere de 90% a fiabilităţii pentru 35.000 km.
e. Aţi cumpăra o anvelopă din acest lot ? Dacă da, spuneţi de ce. Dacă nu, spuneţi de ce.

6.3. Bateriile sunt componente importante pentru majoritatea produselor electronice. Un producător supune 10 baterii la un test de fiabilitate, fiind observaţi următorii timpi de defectare (ore): 9.000, 17.000, 19.000, 21.000, 22.000, 23.500, 24.000, 31.000, 42.000, 75.000.

a. Să se aleagă pentru datele de mai sus o distribuţie exponenţială (se vor elimina timpii de defectare anormali).
b. Să se estimeze parametrii distribuţiei folosind diferite metode.

Scanned with OKEN Scanner

c. Dacă se dorește achiziționarea unei baterii produsă de acest producător, care ar fi fiabilitatea acesteia la $t = 25.000$ ore ?

6.4. Se presupune că producătorul menționat în cazul de mai sus efectuează un test de fiabilitate folosind 15 baterii. Timpii de defectare a 10 unități sunt identici cu cei obținuți mai sus. Producătorul oprește testul pentru unitățile rămase la $t = 85.000$ ore. Să se răspundă la întrebările de mai sus folosind rezultatele noului test.

6.5. 20 de unități sunt supuse unui test de uzură. Timpii de defectare în ore sunt: 7, 8, 10, 12, 14, 19, 24, 27, 8^+, 11^+, 13^+, 20^+, 23^+, 28^+, 35^+, 38^+, 42^+, 46^+, 48^+, 49^+.

a. Să se adopte funcția de risc pentru aceste date.
b. Presupunând o distribuție exponențială a timpului de defectare, să se estimeze rata de defectare și timpul mediu până la defectare.
c. Care este fiabilitatea unei unități la $t = 58$ ore ?
d. Presupunând că datele se potrivesc unei distribuții Rayleigh, să se estimeze parametrii distribuției folosind metoda verosimilității maxime și metoda BLUE. Să se compare rezultatele și să se explice cauzele diferențelor, dacă ele există.

6.6. Să se adopte o distribuție Weibull pentru datele de la cazul 6.5 și să se estimeze fiabilitatea unei unități la $t = 58$ ore. Să se compare rezultatul fiabilității la 58 ore cu cel obținute în cazul de mai sus. Să se explice diferența.

6.7. Se presupune că un producător de anvelope concepe un nou prototip și oferă câte o pereche din ele la 20 dintre clienții săi. Timpii de defectare, măsurați în km de rulare, sunt: 3.500, 4.000, 5.000, 8.000, 8.000, 10.000, 11.500, 13.000, 15.000, 21.000, 29.000, 34.000, 37.500, 9.000^+, 12.000^+, 22.000^+, 27.000^+, 37.000^+, 48.000^+ și 50.000^+. Semnul "+" indică faptul că acei clienți au încetat testul la kilometrajul indicat.

a. Să se adopte o distribuție Weibull pentru aceste date. Să se determine parametrii distribuției.
b. Care este fiabilitatea unei anvelope la $t = 60.000$ km ?

6.8. Un producător de comutatoare cu manetă cu durată de viață îndelungată supune 15 comutatoare testului de fiabilitate și înregistrează numărul activărilor până la defectare după cum urmează(ordonate crescător): 45.000; 50.500; 59.000; 71.000; 79.000; 86.000; 90.000; 95.000; 98.000; 100.000; 111.000; 113.000^+; 114.000^+; 118.000^+; 120.000^+ („+" indică cenzurarea).

a. Presupunând că activările până la defectare urmează o distribuție lognormală, să se determine parametrii ei.

Scanned with OKEN Scanner

b. Să se determine intervalele de încredere 95% pentru parametrii distribuţiei.
c. Care este variaţia parametrilor ?
d. Presupunând că producătorul ignoră observaţiile cenzurate şi limitează analiza numai la datele ne-cenzurate, să se compare duratele de viaţă medii când sunt incluse în analiză şi datele ne-cenzurate şi cele cenzurate.

6.9. Fiind nesigur pe distribuţia aleasă defectării, producătorul din cazul de mai sus doreşte să folosească distribuţia Gamma.

a. Să se rezolve punctele (a) → (d) ale problemei anterioare folosind distribuţia Gamma.
b. Să se compare duratele de viaţă medii obţinute din distribuţia lognormală şi respective, Gamma.
c. Să se calculeze variaţia parametrilor distribuţiei Gamma.

CAPITOLUL 7

7.1. Timpii de cădere ai diodei x (diodă Schottky) în ambele tipuri de condiţii de funcţionare– accelerate şi normale – se presupune că urmăresc o distribuţie Gamma de aceeaşi formă a parametrului γ. Funcţia de densitate a probabilităţii la distribuţia Gamma este:

$$f(t)=\frac{t^{\gamma-1}}{\theta^{\gamma}T(\gamma)}e^{\frac{-1}{\theta}}$$

unde θ- este parametrul de scală a distribuţiei.

a. Să se găsească relaţia dintre ratele de hazard în ambele situaţii – de încercare accelerată şi respective, condiţii normale.
b. Să se determine expresia fiabilităţii, în condiţii normale de operare, funcţie de factorul de accelerare şi parametrii distribuţiei Gamma, în condiţii de accelerare.
c. Să se determine expresia factorului de accelerare.

7.2. Coroziunea electrolitică a metalizării implică transportul ionilor metalici între două metale pe o suprafaţă. Conductivitatea suprafeţei afectează rata de transport a materialului şi reduce durata de viaţă a dispozitivului. Un test accelerat a duratei de viaţă se realizează pe 20 de circuite integrate prin supunerea lor la o umiditate relativă cunoscută, obţinându-se următorii timpi de cădere, în ani :

Scanned with OKEN Scanner

0,0031667; 0,0056359; 0,0061977 ; 0,0067325; 0,0069382; 0,0076820; 0,0106340; 0,0107340; 0,0116650; 0,0119780; 0,0122230; 0,0128110; 0,0132280; 0,0154420; 0,0156650; 0,0164890; 0,0217990; 0,0296007; 0,0311001; 0,0373216.

Din reprezentarea grafică a ratei de defectare rezultă că timpii de cădere pot fi descrişi de distribuţia Gamma. Presupunând că în experimente se utilizează un factor de accelerare de 20, să se estimeze parametrii distribuţiei în condiţii normale de operare. Care este fiabilitatea dispozitivului la momentul de timp 0,6 ani?

7.3. În realizarea unei noi analize referitoare la experimental din cazul anterior, se completează datele din problema 7.2 cu încă cinci observaţii realizate la timpul de cenzură 0,0385460 ani (când are loc terminarea testului). Să se refacă calculele de mai sus şi să se compare rezultatele obţinute.

7.4. Este clar faptul că, în funcţionarea unei maşini, defectările ce pot să apară se datoresc efectului combinat al încărcării cu cel al temperaturii. 15 epruvete executate din oţel inoxidabil sunt supuse unui test mecanic accelerat de rupere în care nivelurile de încărcare aplicate sunt semnificativ mai mari decât cele luate în calcul la proiectare, astfel încât căderea să apară mult mai rapid decât în condiţii normale. Timpii (în ore) de cădere la un test accelerat cu o încărcare de 710 MPa sunt : 30,80; 36,09; 65,68; 97,98; 130,97; 500,75; 530,22; 653,96; 889,91; 1173,76; 1317,08; 1490,44; 1669,33; 2057,95; 2711,36.

Se presupune că timpii de cădere pot fi modelaţi printr-o distribuţie exponenţială şi că factorul de accelerare dintre durata medie de viaţă în condiţii normale şi cea din condiţiile de stres accelerat este 20. Să se determine parametrul distribuţiei în condiţii normale şi fiabilitatea ca o epruvetă să supravieţuiască timp de 10.000 de ore.

7.5. Verificarea fiabilităţii unui nou braţ de suspensie ştanţat necesită determinarea lui R90 (fiabilitatea de 0,90) la 50000 cicluri de testare verticală, cu schimbarea direcţiei (în sus şi în jos). 8 unităţi de braţe de suspensie sunt supuse unui test accelerat, rezultatele obţinute fiind următoarele :

Cicluri funcţionare	*Starea*
75000	Cădere
95000	Cădere
110000	Cădere
125000	Cădere
125000	Cenzurat

Scanned with OKEN Scanner

125000	Cenzurat
125000	Cenzurat
125000	Cenzurat

Se presupune că factorul de accelerare este de 1,4 şi că distribuţia Weibull reprezintă distribuţia probabilistică a timpului de defectare. Să se determine parametrii distribuţiei.

7.6. Să se deriveze expresiile care reprezintă funcţiile de rată a defectării, funcţiile densităţii de probabilitate şi funcţiile de fiabilitate în condiţii de stres accelerat şi în condiţii normale de funcţionare, când distribuţia timpului de defectare pentru ambele condiţii este una Erlong specială de forma :

$$f(t)=\frac{t}{\lambda^2}e^{\frac{-t}{\lambda}},$$

unde λ este parametrul distribuţiei.

7.7. Cablurile optice sunt supuse unui interval mare de temperaturi. Cablurile îngropate suportă variaţii mici de temperatură, în timp ce cablurile aeriene înregistrează intervale de variaţii mult mai mari ale temperaturii. Pentru fiecare tip de cablu, proprietăţile de transmisie a fibrelor optice se pot schimba doar într-un interval limitat a unor astfel de variaţii. Pentru a determina performanţa lor la temperatură, schimbarea de atenuare este măsurată ca funcţie de aceasta. Acest lucru este de obicei realizat prin plasarea cablului înfăşurat într-o cameră computerizată de control a temperaturii, cu ambele capete ataşate la un set de măsurare a atenuării transmisiei. Media atenuării la o temperatură de -40°C este mai mică de 0,1dB/km.
Două mostre, fiecare având câte 25 de cabluri, sunt supuse la un test accelerat de temperatură, între -20°C şi 70°C şi timpii până când o modificare a atenuării de 0,3dB/km se înregistrează (o atenuare mai mare de 0,28 dB/km fiind considerată inacceptabilă) sunt după cum urmează:

Timpi de cădere la -20 °C	*Timpi de cădere la 70 °C*
4.923,01	9.082,28
4.937,33	9.090,59
4.938,33	9.228,30
4.957,34	9.271,51
4.957,42	9.394,54
4.960,18	9.438,95
4.969,82	9.693,95

Scanned with OKEN Scanner

4.971,28	9.694,27
4.971,64	9.778,96
4.977,37	9.966,46
4.979,76	10.015,00
4.983,77	10.086,80
4.992,01	10.115,00
4.997,98	10.131,90
4.997,83	10.141,90
5.003,59	10.149,50
5.004,30	10.205,60
5.005,54	10.249,60
5.009,98	10.291,20
5.017,21	10.310,50
5.022,17	10.313,10
5.027,04	10.341,00
5.027,89	10.469,00
5.032,00	10.469,00
5.045,85	10.533,50

a. Presupunând că timpii de cădere urmăresc distribuții lognormale, să se estimeze parametrii distribuțiilor pentru ambele niveluri de stres.
b. Presupunând că durata medie de viață a cablului este liniar dependentă de temperatura mediului, care este durata medie de viață la 25°C?

7.8. Un test accelerat este realizat pe 2 loturi de câte 15 tranzistori, cu *n* canale fiecare, prin supunerea unui lot la un voltaj de 20V şi o temperatură de 200°C, iar a celui de-al doilea la o tensiune de 27V şi o temperatură de 120°C. Condițiile normale de funcționare sunt: 9V şi 30°C. Timpii de defectare (în secunde) rezultați sunt :

Timpii de cădere pentru primul lot	*Timpii de cădere pentru al doilea lot*
48,7716	10,4341
48,8160	12,4544
49,1403	12,9646
49,3617	13,0883
50,0852	13,1680
50,6413	13,1984
50,7534	13,6002
50,8506	14,1088

Scanned with OKEN Scanner

51,1490	14,8734
51,2638	15,1088
51,3007	15,4149
51,3085	16,0556
51,4376	16,2214
51,9868	18,2557
53,5653	18,2615

a. Să se calculeze pentru ambele loturi factorii de accelerare a câmpul electric şi al accelerării termice, pentru ambele niveluri de stres (energia de activare este de 0,12eV şi $E_{EF} = 3$).
b. Presupunând că datele de la fiecare nivel de stres pot fi modelate folosind o distribuție lognormală dată de ecuația (7.20), să se determine durata medie de viață în condiții normale de operare.

7.9. Folosind datele din problema 7.8, să se obțină un factor de accelerare combinat, dat de ecuația (7.24).

7.10. Se dă următorul set de timpi de defectare, la diferite condiții de testare accelerată, pentru un lot de dispozitive electronice. Timpii de cădere sunt în secunde.

Timp de cădere	*Temp [°C]*	*Tens. [V]*	*Timp de cădere*	*Temp. [°C]*	*Tens. [V]*	*Timp de cădere*	*Temp. [°C]*	*Tens. [V]*
1	25	27	1	225	26	1365	125	25,7
1	25	27	14	225	26	1401	125	25,7
1	25	27	20	225	26	1469	125	25,7
73	25	27	26	225	26	1776	125	25,7
101	25	27	32	225	26	1789	125	25,7
103	25	27	42	225	26	1886	125	25,7
148	25	27	42	225	26	1930	125	25,7
149	25	27	43	225	26	2035	125	25,7
153	25	27	44	225	26	2068	125	25,7
159	25	27	45	225	26	2190	125	25,7
167	25	27	46	225	26	2307	125	25,7
182	25	27	47	225	26	2309	125	25,7
185	25	27	53	225	26	2334	125	25,7
186	25	27	53	225	26	2556	125	25,7
214	25	27	55	225	26	2925	125	25,7

Scanned with OKEN Scanner

214	25	27	56	225	26	2997	125	25,7
233	25	27	59	225	26	3076	125	25,7
252	25	27	60	225	26	3140	125	25,7
279	25	27	60	225	26	3148	125	25,7
307	25	27	61	225	26	3736	125	25,7

Să se utilizeze un model multiplu liniar pentru a găsi o relație între timpul de cădere temperatură și tensiune. Care este timpul de cădere în condiții normale de operare de 30°C și 5V? $E_a = 0,08eV$.

7.11. Să se folosească, pentru cazul precedent, un model de defectare proporțional pentru a estima rata de cădere în condiții normale de operare de 30°C și 5V. Să se compare această estimare cu cea obținută în cazul 7.10. Să se comenteze eventualele diferențe.

7.12. Un test accelerat de temperatură este realizat pe un lot cu 12 unități supuse unui regim de 300°C. Sau obținut următorii timpi de cădere (în ore) : 200, 240, 300, 360, 390, 450, 490, 550, 590, 640, 680, 730.

a. Presupunând că modelul Eyring descrie într-un mod corespunzător relația dintre durata medie de viață și temperatură, care este durata de viață așteptată la o temperatură de 40°C?
b. Presupunând că energia de activare a unității de material este $E_a = 0,04eV$, să se utilizeze un model Arrhenius pentru a estima durata medie de viață la 40°C.

7.13. Utilizând modelul Arrhenius pentru a obține o relație între durata medie de viață, temperatură și tensiune, să se compare estimarea duratei medii de viață în condiții normale (30°C și 5V) cu estimările obținute în cazurile 7.10 și 7.11. Sunt modele statistice fizice de bază mai adecvate decât cele experimentale fizice de bază când se estimează rata de cădere pentru datele din cazul 7.10?

7.14. Tranzistorii de putere/tensiune mare sunt folosiți în multe aplicații unde sunt prezente tensiuni ridicate și curenți mari. De aceea producătorii unor astfel de tranzistori deseori execută teste accelerate și operaționale de durată de viață pentru a îmbunătăți design-ul tranzistorului și pentru a-i asigura fiabilitatea. Un astfel de test accelerat se efectuează prin supunerea unor unități de tranzistori la 2 tensiuni de 50V și 80V. Timpii de cădere (ore) sunt:

Scanned with OKEN Scanner

Timpii de cădere la 50V		*Timpii de cădere la 80V*	
10,55	11,56	3,01	3,05
12,78	13,00	3,06	3,12
13,50	15,00	4,20	4,30
15,01	16,02	4,45	5,62
19,01	25,06	5,67	8,60
25,50	29,60	8,64	9,10
30,10	35,00	9,21	9,26
45,00	49,00	9,29	10,01
58,62		10,20	

a. Să se utilizeze modelul regulei inversului de putere pentru a estima durata medie de viață în condiții normale de 5V. Care este fiabilitatea unui element din lot funcționând în condiții normale la momentul de timp 10.000 ore? $E_a = 0,60eV$.
b. Care sunt factorii de accelerare folosiți în test? Sunt ei adecvați ?
c. Să se rezolve cazul folosind un model Eyring. Să se explice cauzele diferențelor dintre rezultate .

7.15. Producătorul de tranzistori din cazul 7.14 furnizează următoarele informații adiționale despre datele de cădere :

- Testul accelerat de durată de viață folosind 50V este la 90°C.
- Testul accelerat de durată de viață folosind 80V este la 150°C.

a. Să se rezolve cazul 7.14 folosind informațiile adiționale presupunând că $T_0 = 30°C$.
b. Să se compare rezultatele obținute cu cele rezultate din modelul combinat.

7.16. Un anumit tip de dispozitiv electronic este suspectat de cădere datorită electro-migrației. Un test accelerat al duratei de viață este realizat în condițiile următoare :

Timpi de cădere [ore]	*Intensitatea curentului[I]*	*Temp. [°C]*	*Timpi de cădere [ore]*	*Intensitatea curentului[I]*	*Temp. [°C]*
300	10	200	264	10	250
340	10	200	270	10	250
345	10	200	271	10	250
349	10	200	272	10	250
361	10	200	280	10	250
362	10	200	285	10	250
363	10	200	200	15	200

Scanned with OKEN Scanner

369	10	200	205	15	200
374	10	200	207	15	200
379	10	200	209	15	200
380	10	200	210	15	200
390	10	200	211	15	200
250	10	250	215	15	200
251	10	250	220	15	200
252	10	250	222	15	200
260	10	250	225	15	200
262	10	250	228	15	200
263	10	250	230	15	200

a. Să se utilizeze ecuația lui Black pentru a obține o relație de legătură între media timpului de cădere, intensitatea curentului și temperatură. $E_a = 0{,}60eV$.
b. Care este durata medie de viață la $I = 5$ și $T = 30°C$?
c. Presupunând că nu se cunoaște modelul electro-migrației, să se aplice modelul Eyring și să se compare rezultatele.

7.17. Să se rezolve cazul 7.10 dacă umiditatea relativă (RH) în condițiile de testare este :

Temperatură	*Tensiune*	*RH*
25°C	27	70%
225°C	26	50%
125°C	25,7	40%

Se presupune că, condițiile normale de operare ale dispozitivului sunt: temperatura = 30°C, tensiunea = 5V și RH = 30%.

7.18. Criteriul principal pentru performanța rezistorului unui tub cu raze catodice este schimbarea rezistenței sale în timp. Modelul de degradare următor descrie relația dintre schimbarea rezistenței cu timpul și temperatura aplicată :

$$\frac{dR}{dt} = Ae^{\frac{E_a}{kT}}$$

Un producător observă rezistența a 2 rezistori testați la diferite temperaturi: de 80°C și de 120°C. Rezultatele testului, care s-a făcut pe durata a 1.000 de ore, sunt următoarele :

Scanned with OKEN Scanner

Temperatura 80 °C		*Temperatura 120 °C*	
Timp [ore]	*Rezistența [MΩ]*	*Timp [ore]*	*Rezistența [MΩ]*
0	250	0	250
100	270	100	280
200	291	200	309
300	310	300	341
400	328	400	369
500	349	500	402
600	370	600	432
700	387	700	460
800	412	800	490
900	430	900	516
1000	448	1000	547

Valoarea normală a rezistorului este de 250MΩ. Mărimile date de imagini video ale curbelor de variație devin inacceptabile când valoarea rezistorului se schimbă la 340MΩ şi căderea apare când valoarea rezistenței scade la 180MΩ. Să se determine timpul de căderea al sistemului, dacă rezistorul se presupune că lucrează în mod normal la 30°C.

7.19. Pierderea rezistenței unui izolații electrice depinde de vârstă şi temperatură. Rezistența dielectrică este măsurată în kV. Se efectuează un test accelerat asupra a 128 de unități privind rezistența izolației electrice. Testul a presupus 4 unități pentru fiecare combinație de 4 temperaturi de testare (180, 225, 250, 275°C) şi 8 timpi de vârstă (1, 2, 4, 8, 16, 32, 48, 64 săptămâni). Rezistențele dielectrice rezultate pentru cele 128 de unități supuse testului sunt cele prezentate în tabel.

Se presupune că relația dintre media (50%) logaritmilor căderilor datorate tensiunii, $V_{50\%}$, temperatura absolută T şi timpul de expunere t, este :

$$\log V_{50\%} = \alpha - \beta t \exp(-\gamma / T),$$

unde α, β şi γ sunt constante.

Să se estimeze timpul în care o izolație electrică se degradează până la o rezistență dielectrică de 2kV, în condiții normale de temperatură de 150°C.

Scanned with OKEN Scanner

Săpt.	*Temp.*	*Rez. [kV]*	*Săpt.*	*Temp.*	*Rez. [kV]*	*Săpt.*	*Temp.*	*Rez. [kV]*
1	180	15,0	4	250	13,5	32	275	11,0
1	180	17,0	4	275	10,0	32	275	11,0
1	180	15,5	4	275	11,5	32	275	11,0
1	180	16,5	4	275	11,0	32	275	10,0
1	225	15,5	4	275	9,5	32	275	10,5
1	225	15,0	8	180	1,0	32	275	10,5
1	225	16,0	8	180	1,0	32	275	2,7
1	225	14,5	8	180	1,5	32	275	2,7
1	250	15,0	8	180	1,0	32	275	2,5
1	250	14,5	8	225	1,0	32	275	2,4
1	250	12,5	8	225	1,5	48	180	13,0
1	250	11,0	8	225	1,5	48	180	13,5
1	275	14,0	8	225	1,0	48	180	16,5
1	275	13,0	8	250	1,5	48	180	13,6
1	275	14,0	8	250	1,0	48	225	11,5
1	275	11,5	8	250	1,5	48	225	10,5
2	180	14,0	8	250	1,5	48	225	13,5
2	180	16,0	8	275	6,5	48	225	12,0
2	180	13,0	8	275	5,5	48	250	7,0
2	180	13,5	8	275	6,0	48	250	6,9
2	225	13,0	8	275	6,0	48	250	8,8
2	225	13,5	16	180	18,5	48	250	7,9
2	225	12,5	16	180	17,0	48	275	1,2
2	225	12,5	16	180	15,3	48	275	1,5
2	250	12,5	16	180	16,0	48	275	1,0
2	250	12,0	16	225	13,0	48	275	1,5
2	250	11,5	16	225	14,0	64	180	13,0
2	250	12,0	16	225	12,5	64	180	12,5
2	275	13,0	16	225	11,0	64	180	16,5
2	275	11,5	16.	250	12,0	64	180	16,0
2	275	13,0	16	250	12,0	64	225	11,0
2	275	12,5	16	250	11,5	64	225	11,5
4	180	13,5	16	250	12,0	64	225	10,5
4	180	17,5	16	275	6,0	64	225	10,0
4	180	17,5	16	275	6,0	64	250	7,2

Scanned with OKEN Scanner

4	180	13,5	16	275	5,0	64	250	7,5
4	225	12,5	16	275	5,5	64	250	6,7
4	225	12,5	32	180	12,5	64	250	7,6
4	225	15,0	32	180	13,0	64	275	1,5
4	225	13,0	32	180	16,0	64	275	1,0
4	250	12,0	32	180	12,0	64	275	1,2
4	250	13,0	32	225	11,0	64	275	1,2
4	250	12,0	32	225	9,5			

7.20. Cele mai multe procese fizice şi chimice sunt activate termic. La testarea accelerată a duratei de viaţă, scopul aplicării stresului termic este de a induce un număr

de căderi, astfel încât rata de cădere să poată fi calculată, oricând în timpul testului. El se aplică pentru a creşte rata la care procesele fizico-chimice apar în sistem, pentru a măsura efectul lor în timpul tratamentului de îmbătrânire şi a conduce la o caracterizare parametrică a performanţei sistemului. De exemplu, un model simplu ce reprezintă îmbătrânirea în timp a rezistenţei unui film subţire (pelicule) poate fi scris sub forma :

$$\frac{dR(t)}{R_0} = kt^n,$$

unde : R_0 – valoarea iniţială a rezistenţei

k, n – constante

t – timpul corespunzător schimbării de rezistenţă.

Să se utilizeze informaţiile de la cazul 7.14 pentru a estima timpul de atingere a valorii $dR(t) \;/\; R_0 = 8,5.$

Să se compare soluţia cu cea obţinută în cazul 7.14.

CAPITOLUL 8

8.1. Se presupune că $f(t) = 1/4$, $0 \le t \le 4$ (distribuţie uniformă). Să se determine numărul aşteptat de căderi dacă se face o înlocuire la fiecare două săptămâni.

8.2. Condensatorii sunt folosiţi în circuitele electrice pentru suprimarea interferenţelor radio. Majoritatea acestor condensatori sunt realizaţi fie din elemente de plastic metalizat, fie din hârtie metalizată. Condensatorii din hârtie metalizată cad deseori

Scanned with OKEN Scanner

după un scurtcircuit. Dar avantajul major al acestora, față de ceilalți, este capacitatea superioară de menținere a bunei funcționări în condiții uscate. Un producător execută condensatori cu diferite structuri care au o performanță mai bună decât ambele tipuri de condensatori de mai sus. Producătorul supune un condensator la tensiune de tranzitare de 1,2kV, la 10 impulsuri pe zi. Durata fiecărui puls este de 10μs. Când un condensator cade, el este reparat şi supus imediat testului, în aceleaşi condiții. Se presupune că timpul de cădere al condensatorilor urmăreşte o distribuție Erlang cu un *f.d.p.* de forma :

$$f(t) = \frac{t}{\lambda^2} e^{-t/\lambda},$$

unde $\lambda = 2 \times 10^3$ ore. Timpul de reparare are o distribuție exponențială cu rata de reperare de 4×10^2 reparări pe oră. Să se determine numărul aşteptat de căderi pe durata unui an de teste $(0, 10^4$ ore] şi disponibilitatea condensatorului la sfârşitul perioadei de testare.

8.3. Se consideră o componentă a cărei timp de cădere respectă o distribuție exponențială decalată, după cum urmează:

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < \beta \\ 1 - e^{-\lambda(t-\beta)}, & t \geq \beta \end{cases},$$

Să se determine numărul aşteptat de căderi în intervalul (0,t].

8.4. Având dați următorii timpi de cădere, care este numărul aşteptat de căderi în perioadele (0,20] şi (0,40]? Să se compare rezultatele cu cele obținute folosind ecuația asimptotică a numărului aşteptat de căderi. Timpii de cădere în ore sunt:
1,20; 3,5; 4,5; 6,0; 7,9; 12,8; 15,9; 17,9; 22,7; 26,9; 29,8; 30,5; 37,8; 39,0; 48,0; 58,0; 67,0; 75,0.

8.5. Folosind următoarea expresie Laplace pentru numărul aşteptat de căderi în intervalul (0,t]

$$M^*(s) = \frac{f^*(s)}{s[1 - f^*(s)]}$$

să se estimeze numărul aşteptat de căderi la momentul t pentru n componente operabile la început ($t = 0$) când:

a. Distribuția timpilor de cădere este una Erlang specială dată de

Scanned with OKEN Scanner

$$f(t)=\frac{t}{\lambda^2}e^{\frac{-t}{\lambda}} \quad \lambda>0.$$

b. Distribuția timpilor de cădere urmărește distribuția normală dată de

$$f(t)=\frac{1}{\sigma\sqrt{(2\pi)}}\exp\left[-(t-\mu)^2/2\sigma^2\right]$$

8.6. Senzorii electromagnetici (EM) sunt utilizați în diverse sisteme mecanice ale automobilelor (de exemplu la sistemul de anti-blocare a frânei unde înlocuiește componentele hidraulice tradiționale). Rezultă că, o estimare cât mai exactă și o predicție a fiabilității componentelor EM au o importanță foarte mare pentru producătorii de automobile. Un producător de senzori EM supune 50 de unități la un câmp electric și obține următorii timpi de cădere (ore):

Timpi de cădere × 100				
0,076196	0,480874	0,745838	1,08577	1,57504
0,145768	0,512149	0,774938	1,12684	1,62709
0,24849	0,547918	0,832483	1,12863	1,67457
0,268816	0,556499	0,863123	1,20560	1,68656
0,278996	0,599449	0,926084	1,20575	1,73760
0,292879	0,614937	0,926734	1,31209	1,80716
0,322036	0,633408	0,973047	1,40185	1,94672
0,371150	0,636191	0,988017	1,43525	2,08160
0,393230	0,680449	1,022900	1,44437	2,23592
0,462698	0,719642	1,057490	1,49011	2,40073

a. Să se determine numărul așteptat de căderi la $t = 200$ ore.
b. Ataşând datele unei distribuții Weibull, să se determine numărul așteptat de căderi la $t = 200$ ore.
c. Să se compare rezultatele obținute la punctele a și b. Care este concluzia?

CAPITOLUL 9

9.1. Un producător de aparatură medicală folosește aliaje (mai ales nichel-titaniu) pentru producția sa curentă. Astfel de aliaje pot fi încălzite la o anumită temperatură și apoi reîncălzite pentru a ajunge la forma lor originală. Ele se pot fi deforma elastic cu 10-

Scanned with OKEN Scanner

20 % mai mult decât materialele convenţionale. Producătorul fabrică din aceste materiale un dispozitiv de *corecţie a vaselor sanguine* care, atunci când este introdus în vasele de sânge şi este încălzit se dilată pentru a reda şi menţine forma dorită a vasului.
Rezultatele experimentale arată că dispozitivul are o rată de defectare constantă de 0,008333 defectări pe lună. Preţul dispozitivului este de 3.000 RON şi producţia anuală este de 3000 dispozitive. Se presupune ca producătorul doreşte să extindă garanţia produsului la 5 ani. Să se determine fondul de rezervă pentru garanţie şi preţul modificat al produsului.

9.2. Un producător de instrumente de înaltă precizie trebuie să extindă garanţia pentru un nou senzor care este capabil să măsoare cu precizie temperatura între 750^0 C şi 1.500^0 C. Datele statistice arată că rata de risc a senzorului poate fi exprimată ca

$h(t) = kt$, unde $k = 0{,}000085$.

Costul senzorului, ne incluzând garanţia, este de 250 RON. Se presupune că producătorul limitează preţul de vânzare la 270 RON după includerea costului garanţiei. Să se determine durata garanţiei şi fondul total de rezervă al acesteia, pentru 3.000 senzori.

9.3. Să se calculeze suma care trebuie plătită clientului în cazul cumpărării angros, când produsul se defectează în timpul perioadei de garanţie, conform cazului 9.2.

9.4. Un producător doreşte să estimeze costul garanţiei pentru 3.000 produse. Se presupune că fiecare timp de reparare este de natură a descreşte timpul mediu până la următoarea defectare. Datele colectate de pe teren arată că funcţia de distribuţie a timpului de defectare este exponenţială cu diferite valori medii - adică, $F_i(t) = 1 - e^{-\lambda_i t}$ cu $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots < \lambda_w$, unde λ_i este rata de defectare pentru căderea cu numărului i şi λ_w este rata de defectare a ultimei defectări înaintea expirării garanţiei de durată w. Producătorul doreşte să extindă garanţia la 3 luni. Rata de defectare a primelor 5 defectări sunt: 0,5; 0,8; 1; 1,2 şi 3 defectări/an. Preţurile corespunzătoare ale reparaţiilor sunt: 20, 19, 18, 18, 18. Să se determine costul total al garanţiei.

9.5. Distribuţia defectărilor pentru un produs constă într-o combinaţie a două densităţi exponenţiale care au caracteristici dorite ale ratei de defectare. Acest lucru poate fi interpretat ca având o combinaţie a două tipuri de unităţi – o proporţie p de produse defectate cu o rată de defectare înaltă λ_1, şi o proporţie $1-p$ de produse *normale* cu o rata defectărilor mai mică, λ_2. F.d.p.-ul modelului este:

$$f(t) = p\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + (1-p)\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Se presupun: $\lambda_1 = 4$ defectări pe an, $\lambda_2 = 3$ defectări pe an, $p = 0{,}3$ şi costul reparaţiei este de 250 RON. Să se calculeze costul garanţiei pentru o perioadă de 3 ani.

9.6. Se consideră următoarele notaţii:
c = preţul produsului incluzând costurile garanţiei;
w = durata garanţiei;
m = *MTTF*-ul produsului;
$C(t)$= rabatul pro-rata al consumatorului la timpul t; $C(t) = C(1- t/w)$, $0 < t < w$
r = costul rezervei de garanţie a unei unităţi.
Să se deriveze expresia pentru fondul de rezervă al garanţiei, pentru L unităţi de producţie, presupunând că produsul are următoarea funcţie a ratei de risc:

$$h(t) = \frac{\beta}{\lambda^{\beta}} t^{\beta-1}$$

9.7. Să se determine proporţia costului pe unitate care trebuie restituit ca rabat pentru vânzarea en-gros care fac echivalente atât rabatul pro-rata cât şi planul de vânzare en-gros, pentru cazul 9.6.

9.8. Să se afle intervalul de încredere pentru costul aşteptat al garanţiei pro-rata, când distribuţia timpului de defectare este dată de:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}; \quad \lambda > 0.$$

9.9. Să se afle intervalul de încredere pentru costul aşteptat al garanţiei politicii de înlocuire integrală, când tipul de defectare este dat de:

$$f(t) = \frac{\gamma}{\theta} t^{\gamma-1} \exp\left[\frac{-t^{\gamma}}{\theta}\right] \qquad t \geq 0,\ \gamma \geq 1,\ \theta > 0.$$

9.10. O companie de asigurări pentru maşini doreşte să estimeze media anuală a cererilor pentru garanţie pentru un nou model de maşină. În colaborare cu producătorul, compania de asigurări a obţinut datele despre defectări prezentate în tabelul 9.2, din testarea în laborator a diferitelor componente ale maşinii. Cererile sunt aproximativ egale ca valoare faţă de tipurile de defectare. Acest lucru implică ca analizarea datelor de defectare ale tuturor componentelor să fie făcută ca şi cum ele ar veni de la un tip de defectare. Datele tabelate sunt obţinute din supunerea a 84 maşini la un test continuu. Presupunând că: timpul de defectare respectă o distribuţie Weibull; costul unei cereri

Scanned with OKEN Scanner

este de 240 RON; kilometrajul mediu pe mașină este de 15000 km/an; au fost introduse pe piață 20.000 mașini. Care este costul total al cererilor pe an pentru următorii 5 ani?

Tabelul 9.2. Timpii de defectare în ore

Timpii de defectare	*Nr. de unități defectate*
1.000	10
2.100	12
3.400	9
4.400	11.
5.800	10
7.000	14
8.200	10
10.000	8

9.11. Un producător de telefoane mobile intenționează să extindă garanția la 36 luni pentru un nou produs. Un test accelerat a arătat că timpul de defectare al acestor produse, în condiții de operare normale, urmează o distribuție Weibull cu un parametru de formă de 2,2 și un parametru de scară de 10.000. Prețul unei unități este de 500 RON (ne-incluzând costul garanției). Presupunând o producție totală de 15.000 unități, 20.000 unități și 25.000 unități în anii 1, 2 și respectiv 3, să se determine fondul de rezervă pentru garanție și prețul modificat al unui astfel de telefon.

9.12. Producătorul de telefoane mobile dorește să ofere clientului posibilitatea să opteze pentru una următoarele tipuri de garanție:

a. O garanție cu rabat integral pentru durata perioadei de garanție
b. O garanție combinată care oferă compensație integrală dacă produsul se defectează înainte de w_1, urmată de o compensație liniară pro-rata până la sfârșitul celor 36 de luni oferite la garanție.

Să se proiecteze o politică de garanție combinată a cărui fond de rezervă este echivalent cu cel al politicii garanției cu rabat integral.

9.13. Se consideră o metodă/politică de reparare de tip *ca și nou* în care produsul este supus unei reparații capitale complete după defectare. După reparație produsul revine la condiția de *nou*. Se presupune că distribuția timpului de defectare este:

Scanned with OKEN Scanner

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{t^{\alpha_1 - 1}(1-t)^{\alpha_2 - 1}}{B(\alpha_1, \alpha_2)} & dacă \quad 0 < x < 1 \\ 0 & in\ alte\ conditii \end{cases}$$

unde $B(\alpha_1, \alpha_2)$ este funcția Beta definită de:

$$B(\alpha_1, \alpha_2) = \int_0^1 t^{\alpha_1 - 1}(1-t)^{\alpha_2 - 1}\, dt$$

pentru orice numere reale $\alpha_1 > 0$ și $\alpha_2 > 0$. De asemenea,

$$B(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

Parametrii distribuției timpilor de defectare sunt $\alpha_1 = 1{,}5$ și $\alpha_2 = 3{,}0$. Se presupune: $w = 1$ (1 an)Ş costul pentru reparație $c_n = n$. Care este costul total al garanției pentru producție fixă de 2.000 de unități?

9.14. Un sistem stand-by la cald este alcătuit din două componente dispuse în paralel. Costul înlocuirii unei unități defectate este de 50 RON. Ratele defectării componentelor sunt: $\lambda_1 = 0{,}3$ și $\lambda_2 = 0{,}1$ defectări pe lună. Presupunând $W_\phi = 1$, și o durată a garanției de 6 luni, care este intervalul optim de înlocuire?

9.15. Bavurile de găurire sunt considerate o mare problemă în construcția de mașini, în procesele de găurire sau frezare. Multe aplicații necesită să fie eliminate toate bavurile și muchiile ascuțite până când acestea nu sunt vizibile și nu poate fi simțită ascuțimea lor. Un producător fabrică o unealtă eficientă care elimină bavurile și muchiile ascuțite. Acesta intenționează să vândă aceste scule (excluzând prețul garanției) cu 60 RON și oferă o garanție, pentru cumpărare en-gros, pe o durată de 6 luni. Producția anuală este de 6.000 bucăți și producătorul intenționează să investească fondul de garanție la o dobândă de 4 % pe an și să mărească prețul cu 3 % după 6 luni. Se presupune că uneltele au o rată de defectare constantă de 0,006 defectări pe lună. Să se determine prețul produsului incluzând prețul garanției, proporția rabatului pentru vânzări en-gros care trebuie plătit clientului când acestea se defectează înainte de 6 luni și fondul total de rezervă pentru garanție.

9.16. Un producător dorește să schimbe strategia de garanție a unuia dintre produsele sale de la garanția pură pro-rata cu o durată de 12 luni la o garanție cu o politică de rabat integral. Rabatul integral, în cazul vânzării an-gros, constă într-o sumă echivalentă cu costul inițial al produsului, dacă acesta se defectează înainte de W_0 luni de

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

la data cumpărării. Timpul de defectare al produsului urmează o distribuție tip Erlang în 3 etape ($k = 3$). Parametrul λ al distribuției este de 0,005 defectări pe oră. Costul produsului este de 350 RON și funcția de distribuție a timpului de defectare este:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}\left\{\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(\lambda t)^j}{j!}\right\}$$

a. Care este numărul așteptat de defectări în 12 luni?

b. Să se determine mărimea rabatului integral care este echivalent, în costuri, cu garanția curentă.

9.17. Un producător introduce la vânzare un nou tip de imprimantă pe o perioadă de 6 luni iar numărul de imprimante vândut în ziua x este egal cu 5 când x este par și egal cu 10 când x este impar. Se presupune că cererile sunt consemnate în baza de date cu

intervale de timp aferente distribuite pe o perioadă cuprinsă între 0 și 29 zile. Probabilitățile asociate cu aceste intervale sunt: $f_l = 1/20$ pentru $l = 0, 1,..., 9$; $f_l = 1/30$ pentru $l = 10, 11,..., 19$ și $f_l = 1/60$ pentru $l = 20, 21,..., 29$. Se presupune că rata medie a cererilor este de 0,001 pe imprimată pe zi și costul mediu al cererii este de 100 RON. Să se determine cererile totale pentru garanție după 2 luni de la introducerea lor pe piață (durata garanției este de 6 luni).

9.18. Se presupune că producătorul de la cazul 9.17 hotărăște să grupeze cererile de garanție pe baza vechimii. Făcând aceasta, grupează toate cererile pentru imprimante ale căror vechimi se află în același interval de 15 zile. După 2 luni au fost cumulate următoarele cereri:

Grupul de vechime	0-14 zile	15-30 zile	31-45 zile	46-60 zile
Nr de cereri	12	10	9	5

Distribuția probabilității intervalului de raportare a cererilor unui grup este $f_l = 1/20$ pentru $l = 0, 1,..., 9$; $f_l = 1/30$ pentru $l = 10, 11,..., 19$ și $f_l = 1/60$ pentru $l = 20, 21,..., 29$.
Să se determine costul total al cererilor pentru garanție pe o perioadă de 2 luni.

BIBLIOGRAFIE

1. Agrawal, A. şi Barlow, R.E. – *A Survey of Network Reliability and Domination Theory* – Operations Research 32, 1984.

2. Baron, T. ş.a. – *Calitate şi fiabilitate* – Editura Tehnică, Bucureşti, 1988.

3. Birolini , A. - *On the use of Stochastic Prosses in Modeling Reliability Problems* – Lecture Notes in Economic and Mathematical Systems, Berlin:Springer-Verlag,1985.

4. Boland, P.J. şi El-Neweihi, E. – *Measures of Component Importance in Reliability Theory* – Computers and Operations Research 22, 1995.

5. Baxter, L.A. şi Harche, F. – *On Optimal Assembly of Series-Parallel System* – Operations Research Letters 11, 1992.

6. Cătuneanu, V. şi Mihalache, A. – *Bazele teoretice ale fiabilităţii* – Editura Academiei, Bucureşti, 1983.

7. Dhillon, B.S. – *A Hazard Rate Model* – IEEE Transactions on Reliability, R28, 1979.

8. Elandt-Johnson, R. C. şi Johnson, N. L. - *Survival Models and Data Analysis*- New York : John Wiley, 1980.

9. Elsayed , E. A. – *Reliability Engineering* – Addison Wesley Longman, Inc., Massachusetts, 1996.

10. Elsayed , E. A. şi Boucher, T. O. - *Analysis and Control of Production Systems* - Englewood Cliffs ,NJ : Prentice-Hall, 1994.

11. Gandini, A. – *Importance and Sensitivity Analysis in Assessing System Reliability* – IEEE Transactions on Reliability 39, 1990.

12. Grigoraş, Şt. – *Analiza fiabilităţii* – Editura Tehnica-Info, Chişinău, 2001.

Scanned with OKEN Scanner

25.Mann, N.R. s.a. – *Methods for Statistical Analysis of Reliability and Life Data* – New York : John Wiley, 1974.

26. Menke, W.W. – *Determination of Warranty Reserves* – Management Science, 15(10), B542-B549.

27.Papastavridis, S. – *The Most Important Component in a Consecutive –k-out-of-n:F System* – IEEE Transactions on Reliability R-36, 1987.

28.Park, K.S. şi Yee, S.R. – *Present Worth of Service Cost for Consumer Product Warranty* – IEEE Transactions on Reliability R -33(5), 424-426.

29.Prasad, V.R., Nair, K.P.K. şi Aneja, Y. – *Optimal Assignment of Components to Parallel-Series and Series-Parallel Systems* – Operations Research 39, 1991.

30.Proschan, F. – *Theoretical Explanation of Observed Decreasing Failure Rate* – Technometrics 5, 1963.

31.Sava, V, Grigoraş, Şt., Tudose, Fl., Tiron, M. – *Introducere matematică în studiul fiabilităţii sistemelor* – Editura Tehnica, Chişinău, 1997.

32.Sears, R. W. - *Practical Models for Determining Standby Redundancy Levels* - Proceedings of the Annual Reliability and Maintainability Symposium, Los Angeles: IEEE, 1990.

33.Shooman. M. - *Probabilistic Reliability: An Engineering Approach* - New York: McGraw-Hill, 1968.

34. Stadje, W. şi Zuckerman, D. - *Optimal Strategies for Some Repair Replacement Models* – Advances in Applied Probability 22, 641-656, 1990.

35.Târcolea, C. ş.a. – *Tehnici actuale în teoria fiabilităţii* – Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1989.

36. Tilquin, C. şi Cleroux, R. – *Periodic Replacement with Minimal Repair at Failure and Adjustment Costs* – Naval Research Logistics Quarterly 22, 243-254, 1975

Scanned with OKEN Scanner